

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DUAL DÖNÜŞÜMLER VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

Gülsüm BİÇER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2011**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DUAL DÖNÜŞÜMLER VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

Gülsüm BİÇER

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Eş Danışman: Prof. Dr. Rafael LOPEZ

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, n boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında temel kavramlar verilmiş, iki vektör arasındaki açı tanımlanmış ve bu uzaya ait izometrilere bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, izometrik uzaylar arasında bir dual dönüşüm tanımlanmıştır. Bu sayede Öklid uzayındaki bir ortogonal matristen Lorentz-Minkowski uzayında bir yarı ortogonal matris ve Lorentz-Minkowski uzayındaki bir yarı ortogonal matristen Öklid uzayında bir ortogonal matris elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, dual dönüşümlerin geometrik uygulamaları yer alır. Görüş açısı kavramı tanımlanarak örnekler verilmiştir. Bu sayede Öklid uzayındaki ve Lorentz-Minkowski uzayındaki ortogonal eksenler incelenmiştir.

Temmuz 2011, 58 sayfa

Anahtar Kelimeler : Dual dönüşüm, Görüş açısı, Lorentz-Minkowski uzayında ortogonal eksenler.

ABSTRACT

Master Thesis

DUAL TRANSFORMATIONS AND THEIR GEOMETRIC APPLICATIONS

Gülsüm BİÇER

Ankara University

Graduate School of Natural And Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Co Advisor: Prof. Dr. Rafael LOPEZ

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In chapter two, the basic concepts of n dimensional Lorentz-Minkowski space are given, the angle between two vectors is defined and isometries of this space are mentioned.

In chapter three, dual transformation between isometric spaces is defined. By this means, a semi-orthogonal matrix in Minkowski space is obtained from an orthogonal matrix in Euclidean space and an orthogonal matrix in Euclidean space is obtained from a semi-orthogonal matrix in Minkowski space.

Finally in chapter four, geometric applications of dual transformations take place. Examples are given by defining the concept of visual angle. By this means, orthogonal axes in Euclidean space and in Lorentz-Minkowski space are examined.

July 2011, 58 pages

Key Words: Dual transformation, Visual angle, Orthogonal axes in Lorentz-Minkowski space.

TEŞEKKÜR

Öncelikle bu çalışma konusu ile bana araştırma olanağı sağladığı, çalışmamın her noktasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendirdiği için, ayrıca seçtiğim bu yolda azim ve kararlılıkla ilerlememi sağladığı ve beni aydınlattığı için değerli danışman hocam, Sayın Prof Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)'ya, tez çalışmam sırasında önerileri ve desteğiyle hep yanımda olan ve İspanya'da bulunduğum süre içerisinde benden hiçbir konuda yardımını esirgemeyen değerli eş danışman hocam Sayın Prof.Dr. Rafael LOPEZ (Universidad de Granada Department of Geometry and Topology)'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım süresince ve hayatım boyunca bana koşulsuz güvenen, maddi manevi her türlü fedakarlığı gösteren ailem; babam Hüseyin BİÇER, annem Ayşe BİÇER, kardeşim Yusuf BİÇER'e ve ileri görüşlülüğü ile bana her daim ışık tutmuş dedem Sayın Yusuf BİÇER'e en derin duygularla teşekkür ederim.

Gülsüm BİÇER

Ankara, Temmuz 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. \mathbb{E}_1^n LORENTZ-MINKOWSKI UZAYI	2
2.1 Temel Kavramlar	2
2.2 İki Vektör Arasındaki Açık	13
2.3 \mathbb{E}_1^n 'in İzometrilere	24
3. İZOMETRİK UZAYLAR ARASINDAKİ DUAL DÖNÜŞÜMLER ..	29
3.1 Dual Dönüşüm	29
4. DUAL DÖNÜŞÜMLERİN GEOMETRİK UYGULAMALARI	38
4.1 \mathbb{E}^3 Öklid Uzayında Görüş Açısı	38
4.2 \mathbb{E}_1^3 Minkowski Uzayında Görüş Açısı	46
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	58

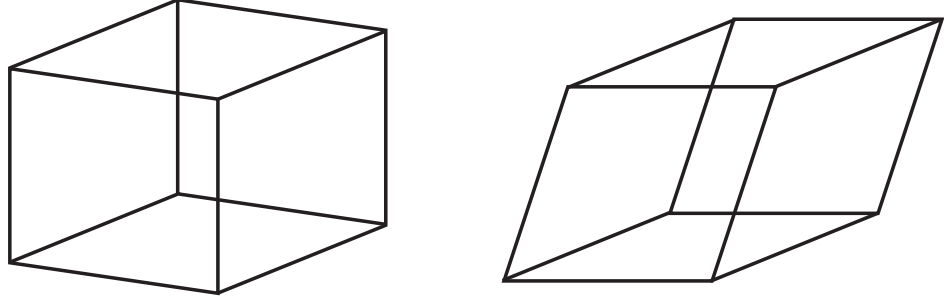
SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{E}_1^n	n boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı
\mathbb{E}^n	n boyutlu Öklid uzayı
\mathcal{C}	Light koni
f, f^{-1}	Dual dönüşümler
$O_1(n)$	\mathbb{E}_1^n in vektör izometrilerin kümesi
$\angle_o APB$	O görüş noktasından $\angle APB$ açısının görüş açısı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	Kutu ve eğik kutu	1
Şekil 2.1	\mathbb{E}_1^3 te causal karakter: u spacelike, v timelike ve w lightlike vektör	4
Şekil 2.2	\mathbb{E}_1^3 te w nin ortogonal vektörleri: u (sol) spacelike ve v (sağ) timelike	12
Şekil 2.3	Öklid uzayında iki birim vektör arasındaki açı	16
Şekil 2.4	Lorentz-Minkowski uzayında iki birim timelike vektör arasındaki açı	19
Şekil 2.5	Timelike bir düzlemdeki iki spacelike vektör arasındaki açı	24
Şekil 4.1	Öklid uzayında görüş açısı	38
Şekil 4.2	$\angle_o A_0 P A_1$ görüş açısı	39
Şekil 4.3	$P - A_0 A_1 A_2$ çatısı ve $\angle_o A_0 P A_1$ görüş açısı	41
Şekil 4.4	Dik kutulara farklı noktalardan bakıldığında görülen yüzleri	43
Şekil 4.5	$\angle_o B_0 Q B_1$ görüş açısı	47

1. GİRİŞ



Şekil 1.1 Kutu ve eğik kutu

Şekil 1.1deki iki resim, bir kutuyu ve eğik bir kutuyu göstermektedir. Hangisi bir kutunun resmi? Kutu kelimesinin zihinlerde oluşturduğu resim soldaki gibidir. Aslında, Lorentz-Minkowski uzayında yaşıyor olsaydı sağdaki resmin bir kutu olduğu ifade edilirdi, diğer taraftan soldaki bir eğik kutunun resmi olurdu. Bakış noktasına ve içinde bulunulan uzaya bağlı olarak görünüşleri değişen bu kutular bu çalışmanın başlangıç noktası olmuştur. Her iki uzaydaki ortogonal eksenler ve "görüş açısı" yardımıyla bu resimler incelenecektir. Çalışma süresince "kutu" olarak ifade edilecek şekiller; özel hali küp olan, bir yüzünün dört ayrıta sahip olduğu dik kutular olacaktır.

Öklid uzayı ve Lorentz-Minkowski uzayındaki ortogonal eksenler ele alınacaktır. Seçilecek noktalarda kurulacak olan dik çatılar, bir kutunun bir köşesine ait olan üç ayrıttan yola çıkılarak zihinlerde canlandırılabilir. Görüş açısı kavramının daha iyi anlaşılmasına olanak sağlayacak bu ortogonal eksenlere bir noktadan bakıldığında elde edilen görüş açıları incelenecektir. Öklid uzayı ve Lorentz-Minkowski uzayında ayrı ayrı incelenecek olan bu görüş açılarının aynı anda dar açılı veya aynı anda geniş açılı olabilme durumlarına göre Şekil 1.1 yorumlanacaktır.

2. \mathbb{E}_1^n LORENTZ-MINKOWSKI UZAYI

2.1 Temel Kavramlar

\mathbb{R}^n , bilinen vektör yapısı ile n boyutlu reel vektör uzayı olsun. \mathbb{R}^n uzayında bir vektörün bilinen koordinatları (x_1, \dots, x_n) olarak verilir. Burada, \mathbb{R}^n uzayında iken \mathbb{R}^n nin genel yapısı düşünülecektir ve bilinen anlamdaki "yatay" veya "dikey"ler ile ifade edilecektir.

Tanım 2.1.1. Lorentz-Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^n = (\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ metrik uzayıdır, \langle, \rangle metriği ile aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i - u_n v_n \quad u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n)$$

\langle, \rangle metriği, Lorentz metriği olarak adlandırılır.

\langle, \rangle metriği, indeksi 1 olan non-dejenere metrik olarak yorumlanır. \mathbb{E}_1^n Minkowski uzayı ve \langle, \rangle Minkowski metriği olarak da adlandırılır. Burada, \mathbb{R}^n uzayında iken Öklid metriği düşünülecek ve Öklid uzayını karşılayan \mathbb{E}^n ifadesi kullanılacaktır.

Lorentz-Minkowski uzayının alt boyutları aşağıdaki gibi gösterilir:

- $n = 1$, $\mathbb{E}_1^1 = (\mathbb{R}, \langle \rangle)$, with $\langle u, v \rangle = -uv$.
- $n = 2$, $\mathbb{E}_1^2 = (\mathbb{R}^2, \langle \rangle)$, with $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2$.

Bu tez çalışmasında, \mathbb{E}_1^n uzayı yalnızca $n \geq 2$ için düşünülecektir. $n = 2$ olması durumunda \mathbb{E}_1^2 , Lorentz-Minkowski düzlemi olarak ifade edilecektir.

Tanım 2.1.2. $v \in \mathbb{E}_1^n$ vektörü,

- $\langle v, v \rangle > 0$ veya $v = 0$ ise *spacelike*,
- $\langle v, v \rangle < 0$ ise *timelike* ve
- $\langle v, v \rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise *lightlike*

olarak adlandırılır.

Burada, $v = 0$ olması durumunda $\langle v, v \rangle = 0$ sağlanmasına rağmen vektörün spacelike olduğu belirtilir.

Bir vektörün normunun tanımı şu şekilde verilir.

Tanım 2.1.3. Verilen $u \in \mathbb{E}_1^n$ vektörü için $\sqrt{|\langle u, u \rangle|}$ ifadesi u vektörünün normu olarak adlandırılır ve $|u|$ şeklinde yazılır. u vektörünün normu 1 ise bu vektöre *birim* denir.

Sonuç olarak, u bir spacelike vektör ise $|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$,
timelike vektör ise $|u| = \sqrt{-\langle u, u \rangle}$ olur.

Tanım 2.1.4. \mathbb{E}_1^n uzayına ait *light-koni*, \mathbb{E}_1^n uzayının tüm lightlike vektörlerinin kümesidir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mathcal{C} = \{v \in \mathbb{E}_1^n; \langle v, v \rangle = 0\} - \{(0, \dots, 0)\}.$$

\mathcal{C} alt boyutlarda aşağıdaki gibi hesaplanır:

- $n = 2$ için, $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2; x^2 - y^2 = 0\} - \{(0, 0)\}$ biri $x - y = 0$ diğeri $x + y = 0$ olan iki doğrudan oluşur.
- $n = 3$ için, $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3; x^2 + y^2 - z^2 = 0\} - \{(0, 0, 0)\}$ tepe noktası orijin olan konidir.

Timelike vektörlerinin kümesi \mathcal{T} ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde verilir:

$$\mathcal{T} = \{v \in \mathbb{E}_1^n; \langle v, v \rangle < 0\}.$$

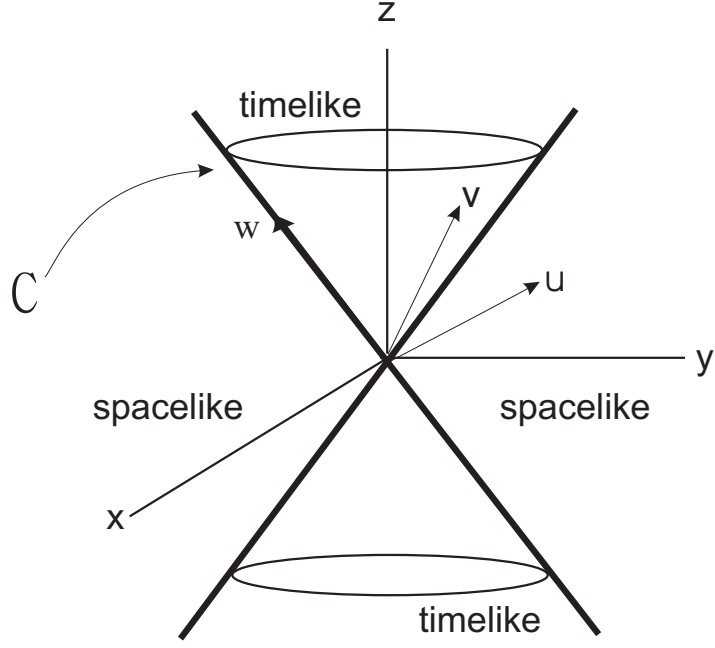
\mathcal{T} timelike vektörlerinin kümesinin iki bileşeni $\{v \in \mathcal{T}; v_n > 0\}$ ve $\{v \in \mathcal{T}; v_n < 0\}$, birbiri ile tam olarak bağlantılı değildir. Spacelike vektörler kümesi daima bağlantılıdır. \mathcal{C} light-konisi, $n = 2$ durumunda birbirleri ile bağlantılı dört bileşenden oluşurken $n > 2$ olması durumunda iki bileşenlidir (Şekil 2.1).

Tanım 2.1.5. $U \subset \mathbb{E}_1^n$ bir alt vektör uzayı olsun. U daki indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise U spacelike, indeksi 1 olan non-dejenere ise timelike ve $U \neq \{0\}$ ise lightlike olarak adlandırılır.

Bir vektörün veya bir alt uzayın spacelike, timelike veya lightlike bir *causal karaktere* sahip olması beklenir.

Bir alt uzay ve bu alt uzayın causal karakteri ile ilgili örnekler aşağıda verilmiştir:

1. $(1, 0, 0)$ ve $(0, 1, 0)$ spacelike vektörlerdir. $(0, 0, 1)$ bir timelike vektördür. $(1, 0, 1)$ ve $(0, 1, 1)$ lightlike vektörlerdir.



Şekil 2.1 \mathbb{E}_1^3 'te causal karakter: u spacelike, v timelike ve w lightlike vektör

2. $\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ spacelike bir düzlemdir. $\langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$ ve $\langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ timelike düzlemlerdir. $\langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle$ lightlike bir düzlemdir. Yukarıda verilen alt uzayların her birindeki metriğe ait matrisler, verilen bazlara göre sırasıyla aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $\langle (1, 0, 0), (1, 1, 1) \rangle$ lightlike bir düzlemdir fakat $\{(1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ spacelike vektörlerdir. Metriğe ait matris aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. $\langle (0, 1, 0), (0, 2, 1) \rangle$ timelike bir düzlemdir fakat $\{(0, 1, 0), (0, 2, 1)\}$ spacelike vektörlerdir. Metrik şu şekilde verilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. $(0, 1, 0)$ spacelike bir vektördür, $(0, 1, 1)$ lightlike bir vektördür fakat $\langle (0, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$

timelike bir düzlemdir. Metrik aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Önerme 2.1.6. \mathbb{E}_1^n uzayının her alt uzayı spacelike, timelike veya lightlike olmak zorundadır.

İspat n boyut üzerinde tümevarım uygulansın. $n = 2$ ise non-trivial alt uzaylar 1 boyutludur ve sonuç aşıkardır.

1. U non-dejenere ise U^\perp de non-dejenere olur. O halde U nun ortonormal bazı ve U^\perp in ortonormal bazı, \mathbb{E}_1^n in ortonormal bazlarını verir. Dolayısıyla U daki -1 lerin sayısı, 1 veya 1 den az olur. Böylece U daki metriğe ait matrisler aşağıdaki gibidir, U timelike veya pozitif tanımlı olur.

$$\begin{pmatrix} +1 & \dots & & & & & & & & \\ & \vdots & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & +1 & \vdots & & & & & \\ & & & \dots & -1 & & & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 & \dots & & & & & & & & \\ & \vdots & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & +1 & \vdots & & \\ & & & & & & \dots & +1 & & \end{pmatrix}.$$

2. U dejenere ise U nun bazında bulunan sayılar: $+1$, -1 , ve 0 dır.

$W \subset U$ alt uzayı, bazlarında $+1$ ve -1 sayıları bulunan non-dejenere bir alt uzaydır. Dolayısıyla W Lorentzian veya pozitif tanımlıdır. Bu, U daki metriğe ait matrislerin aşağıdaki gibi oldukları anlamına gelir.

$$\begin{pmatrix} +1 & \dots & & & & & & & & \\ & \vdots & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & +1 & & & \\ & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & & \dots & \vdots & & \\ & & & & & & \dots & 0 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 & \dots & & & & & & & & \\ & \vdots & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & & \dots & \vdots & & \\ & & & & & & \dots & 0 & & \end{pmatrix}.$$

O halde W nin ortonormal altuzayı W^\perp ve $W^\perp \subset \mathbb{E}_1^n$ olduğu düşünülerek, W^\perp iki durumda aşağıdaki gibi gösterilir. İlk durum, W^\perp spacelike olduğunda; ikinci durum, W^\perp Lorenzian olduğundadır.

İlk durum için: W^\perp spacelike ise, bir ortonormal baz düşünölsün, $U \subset W^\perp$ içinde bir lightlike vektör vardır, ki bu da imkansızdır.

İkinci durum için: W^\perp timelike ise boyutu \mathbb{E}_1^n in boyutundan bir eksik olan $\dim(W^\perp) = n - 1$ olur ve tümevarım hipotezi kullanılır. Bunun için U ile W^\perp nin arakesiti düşünölür, bu da $W \subset U$ nin ortogonalı olan bir W' olur. Bu alt uzay W^\perp içindedir, dolayısıyla spacelike, timelike veya lightliktir. W' deki metrik dejenere olduğundan lightliktir. Böylelikle, ortonormal baza göre verilen W' deki metriğin matrisi $+1, \dots, +1, 0$ dır.

$$\begin{pmatrix} +1 & \dots & & \\ & \ddots & & \\ & & +1 & \vdots \\ & & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu baz ve W nin bir bazı birlikte, U nun bir bazını oluşturur. Oluşturulan baz $(+1, \dots, +1) + (+1, \dots, +1, 0)$ dır ve bu baza göre verilen metriğe ait matris aşağıdaki gibidir:

$$\begin{pmatrix} +1 & \dots & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \vdots \\ & & \dots & +1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +1 & \dots & & \\ & \ddots & & \\ & & +1 & \vdots \\ & & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

U nun lightlike olduğu anlamına gelir.

Şimdi, causal karakterine bağlı olarak alt uzayların karakterizasyonları verilecektir.

Önerme 2.1.7.

1. $v \in \mathbb{E}_1^n$ olsun. $\langle v \rangle^\perp$ timelike (sırasıyla spacelike, lightlike) $\Leftrightarrow v$ spacelike (sırasıyla timelike, lightlike) vektördür.
2. $U \subset \mathbb{E}_1^n$ bir alt uzay olsun. U^\perp timelike (sırasıyla spacelike, lightlike) $\Leftrightarrow U$ spacelike (sırasıyla timelike, lightlike) alt uzaydır.

İspat

1. v spacelike veya timelike bir vektör olsun ve $\epsilon = \pm 1$ olduğunda $\langle v, v \rangle = \epsilon$ olduğu varsayalım. \mathbb{E}_1^n in ortonormal bazı, bir elemanı v olacak şekilde genişletilirse, $\langle e_n, e_n \rangle = -\epsilon$ olduğunda $B = \{v, e_2, \dots, e_n\}$ olur. O halde $\langle v \rangle^\perp = \langle e_2, \dots, e_n \rangle$ dir, ki bu alt uzay $\epsilon = 1$ ise timelike, $\epsilon = -1$ ise spacelike bir alt uzaydır. Diğer taraftan $\{e_2, \dots, e_n\}$ bazı, $\langle e_n, e_n \rangle = \pm 1$ olduğunda $\langle v \rangle^\perp$ nin ortonormal bir bazı olsun. $B = \{v, e_2, \dots, e_n\}$ ye bağlı olarak verilen metriğe ait matris şöyledir:

$$\begin{pmatrix} \langle v, v \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \epsilon \end{pmatrix}.$$

Lorentz metriğinin indeksi 1 dir, o halde $\langle v, v \rangle = -\epsilon$ olur ve bu da sonucu gösterir.

v bir lightlike vektör olsun. Önerme 2.1.6 kullanılarak ve yukarıdaki düşünce ile, $v \in \langle v \rangle^\perp$ alt uzayı lightlike olmak zorundadır. $\langle v \rangle^\perp$ lightlike ise, yine yukarıdaki düşünce ile, v vektörü spacelike veya timelike olamaz, v lightlike olmak zorundadır.

2. U timelike iken $v \in U$ bir timelike vektör olsun. O halde $U^\perp \subset \langle v \rangle^\perp$ olur. Yukarıdaki madde ile, $\langle v \rangle^\perp$ spacelike olduğu görülür ve spacelike alt uzayın her alt uzayı da spacelike olduğu için U^\perp spacelikedir.

U spacelike ise ve $\mathbb{E}_1^n = U \oplus U^\perp$ olduğundan U^\perp alt uzayı spacelike olamaz. U^\perp lightlike ise Lorentz metriği dejenere olmalıdır. O halde, Önerme 2.1.6 ile U^\perp timelike olur.

Sonuç olarak U lightlike ise, yukarıdaki yukarıdaki düşünce ile, U^\perp spacelike veya timelike olamaz. O halde U^\perp lightlike olur.

Önerme 2.1.8.

1. $u, v \in \mathbb{E}_1^n$ olsun. u ve v timelike vektörler $\Rightarrow \langle u, v \rangle \neq 0$ dır.
2. u ve v iki lightlike vektör olsun. $\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow$ lineer bağımlıdır.

İspat

1. Genel durumu bozmadan, $|u| = 1$ olduğu varsayalım. $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, $u = e_n$ gibi, \mathbb{E}_1^n in ortonormal bir bazı olduğu düşünölsün . $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ olsun. $\langle u, v \rangle = 0$ ise $x_n \langle u, u \rangle = 0$ olur. O halde $x_n = 0$ dır. Dolayısıyla $v = \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i$ dir ve bu nedenle $\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \geq 0$ olur, ki bu bir çelişkidir.

2. u ve v lineer bağımlı ise ortogonaldirler. Şimdi, bu vektörlerin ortogonal oldukları düşünölsün. $e_n = (0, \dots, -1)$ olsun. $\mathbb{E}_1^n = \langle e_n \rangle^\perp \oplus \langle e_n \rangle$ ifadesi içinde $u = x + \lambda e_n$ ve $v = y + \mu e_n$ yazılsın. $\langle u, v \rangle = 0$ iken ve bunlar lightlike vektörler olacak şekilde, aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\langle x, y \rangle - \lambda\mu = 0.$$

$$|x|^2 - \lambda^2 = 0.$$

$$|y|^2 - \mu^2 = 0.$$

Üç eşitliğin toplamı ile,

$$\langle x, y \rangle^2 = |x|^2 |y|^2$$

elde edilir. x ve y spacelike vektör oldukları için Cauchy-Schwarz eşitsizliği x ve y nin lineer bağımlı olduğunu garanti eder. O halde u ve v vektörleri için de aynı şey söz konusudur.

Şimdi, timelike alt uzaylarda çalışılacaktır.

Önerme 2.1.9. $U \subset \mathbb{E}_1^n$ bir alt uzay ve $boy(U) \geq 2$ olsun. Aşağıda verilen ifadeler birbiri ile eşdeğerdir:

1. U bir timelike alt uzaydır.

2. U lineer bağımsız iki lightlike vektör içerir.
3. U bir timelike vektör içerir.

İspat

• $1 \Rightarrow 2$ $\{e_1, \dots, e_m\}$ bazı, e_m timelike vektörü ile, U nun bir ortonormal bazı olsun. O halde $e_1 + e_m$ ve $e_1 - e_m$ lineer bağımsız lightlike vektörler olurlar.

• $2 \Rightarrow 3$ u ve v lineer bağımsız iki lightlike vektör ise $u + v$ veya $u - v$ bir timelike vektör olur, çünkü

$$\langle u \pm v, u \pm v \rangle = \pm 2\langle u, v \rangle$$

ve $\langle u, v \rangle \neq 0$ dır (Önerme 2.1.8).

• $3 \Rightarrow 1$ v vektörü U ya ait bir timelike vektör olsun. O halde $U^\perp \subset \langle v \rangle^\perp$ dir ve $\langle v \rangle^\perp$ bir spacelike alt uzaydır. Sonuç olarak U^\perp spacelikedir ve bu nedenle U timelike olur (Önerme 2.1.7).

Yukarıdaki sonuç, bir alt uzayın timelike olup olmadığını bilmek için, o alt uzayda *yalnız bir* timelike vektör bulmanın yeterli olacağını söylemektedir. Bu durum diğer alt uzaylar için geçerli değildir. Örneğin \mathbb{E}_1^3 uzayında $x = 0$ düzlemi $(0, 1, 0)$ spacelike vektörünü ve $(0, 1, 1)$ lightlike vektörünü barındırır fakat düzlem ne spacelike ne de lightlike bir düzlemdir. Buna ek olarak, $y - z = 0$ bir lightlike düzlemdir ve lightlike vektörler içermektedir. Fakat düzlemdeki tüm lightlike vektörler $(0, 1, 1)$ vektörü ile lineer bağımlı olan vektörlerdir.

Lightlike alt uzaylar ile devam edilecektir.

Önerme 2.1.10. U , \mathbb{E}_1^n de bir alt uzay olsun. Aşağıda verilen ifadeler birbiri ile eşdeğerdir:

1. U bir lightlike alt uzaydır.
2. U bir lightlike vektör içerir fakat timelike vektör içermez.
3. $U \cap \mathcal{C} = L - \{0\}$ ve boy $(L) = 1$.

$\text{Boy}(U \cap U^\perp) = 1$ olduğu durumdadır.

İspat

- $1 \Rightarrow 2$ U daki metrik dejenere olduğu için U da bir lightlike vektör vardır. Timelike vektör yoktur (Önerme 2.1.9).
- $2 \Rightarrow 3$ Lightlike vektörler bulunduğu için $U \cap \mathcal{C}$ arakesiti boş küme değildir. Tekrar Önerme 2.1.9 ile, eğer iki lineer bağımsız lightlike vektör olsaydı bir timelike vektör var olurdu, ki bu imkansızdır. Dolayısıyla, U daki tüm lightlike vektörler lineer bağımlıdır.
- $3 \Rightarrow 1$ Lightlike vektörler var olduğundan alt uzay spacelike değildir. Hipotez ile, U daki tüm lightlike vektörler lineer bağımlıdır ve Önerme 2.1.9 U nun timelike olmadığını belirtir. Sonuç itibariyle, Önerme 2.1.6 U nun lightlike olduğunu söyler.

Alt uzayların hiper düzlemler için olan daha yüksek boyutlu olduğu hallerde, \mathbb{R}^n deki Öklid metriğini kullanarak causal karakteri ayırt etmek mümkündür.

Önerme 2.1.11. P , \mathbb{E}_1^n in bir hiperdüzlemi olsun. v de Öklid metriği ile bir ortogonal vektör olsun. v bir timelike (sırasıyla spacelike, lightlike) vektör $\Leftrightarrow P$ bir spacelike (sırasıyla timelike, lightlike) düzlemdir.

İspat P , $P = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$ olarak yazılırsa v vektörü (a_1, \dots, a_n) vektörü ile lineer bağımlı olur. P aynı zamanda şu şekilde de yazılır:

$$P = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_1^n; \langle (x_1, \dots, x_n), (a_1, \dots, -a_n) \rangle = 0 = \langle (a_1, \dots, -a_n) \rangle^\perp .$$

$(a_1, \dots, -a_n)$ in causal karakteri v ninki ile aynıdır, çünkü

$$\langle (a_1, \dots, -a_n), (a_1, \dots, -a_n) \rangle = a_1^2 + \dots - a_n^2 = \langle v, v \rangle,$$

ki bu sonucu ispatlar.

\mathbb{E}_1^n de hiperdüzlemler üzerine çalışılmaya devam edilecektir. Burada, hiperdüzleme ait bir normal vektörü düşünölsün ve bu vektörün normu Lorentz ve Öklid metriği ile ayrı ayrı hesaplanarak bir karşılaştırma yapılsın.

Önerme 2.1.12. P spacelike veya timelike bir hiperdüzlem ve $P = \langle v \rangle^\perp$ ise, $|v| = 1$ iken,

$$|v|_e \geq 1$$

olur, e altindeksi olduğunda hesaplama \mathbb{E}^n nin Öklid metriği ile yapıldığını gösterir.

İspat $P = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$ şeklinde yazılsın. Genel durumu bozmadan, $v = (a_1, \dots, -a_n)$ olduğü varsayılsın. $a_1^2 + \dots - a_n^2 = \epsilon$ ve $\langle v, v \rangle = \epsilon$ olduğünü biliniz. Burada, $\epsilon = -1$ ise P timelike, $\epsilon = 1$ ise P spacelikedir. v nin normu Öklid metriği ile hesaplınsın. $\epsilon = 1$ ise sonuç,

$$|v|_e^2 = a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2 \geq a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 - a_n^2 = \epsilon = 1.$$

şeklinde olur. Eğer $\epsilon = -1$ ise ve $\langle v, v \rangle = -1$ den, $a_n^2 = 1 + a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 \geq 1$ olur. O halde $a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 = a_n^2 - 1$ ve

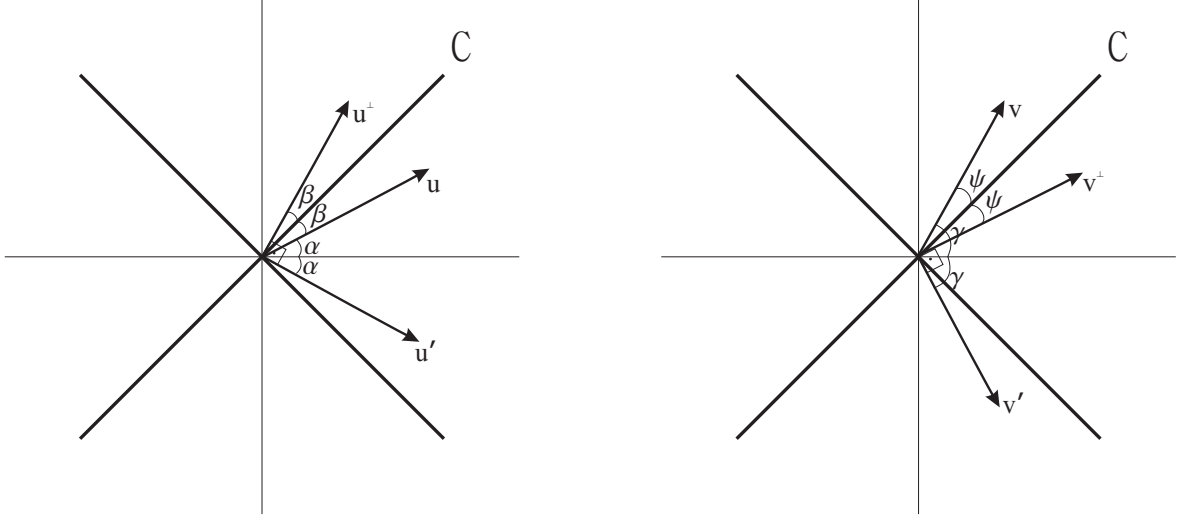
$$|v|_e^2 = a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2 = 2a_n^2 - 1 \geq 1$$

elde edilir.

Yansımalar (Öklid anlamındaki) ile \mathbb{E}_1^n deki ortogonallığın ilişkilendirilmesi aşğıdaki gibidir. Bu ilişkilendirme \mathbb{E}_1^2 de yapılacaktır.

Önerme 2.1.13. \mathbb{E}_1^2 Lorentz-Minkowski düzlemi düşünölsün. $u \in \mathbb{E}_1^2$ ise u nun ortogonal bir vektörü \mathcal{C} light konisine göre u nun bir yansımasıdır (Şekil 2.2).

İspat $u = (x, y)$ olsun. $ax - by = 0$ ise $(a, b) \in u^\perp$ olur. u nun $x_2 = x_1$ doğrusuna göre yansıması e içindedir ve (y, x) tir. Doğrunun denklemi (y, x) noktasını sağlar, $x.x_1 - y.x_2 = 0$ olur. Sonuç olarak, (a, b) vektörü denklemi sağlar.



Şekil 2.2 \mathbb{E}_1^3 'te w nin ortogonal vektörleri: u (sol) spacelike ve v (sağ) timelike

Bu bölümde son olarak, \mathbb{E}_1^n in timelike vektörlerinin \mathcal{T} kümesinde bir denklik bağıntısı tanımlanacaktır. $\forall u \in \mathcal{T}$ için, u nun aşağıdaki küme ile verilen *timelike konisi* tanımlanır.

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T}; \langle u, v \rangle < 0\}.$$

Bu küme $u \in C(u)$ olduğundan boş küme değildir. Buna ek olarak \mathcal{T} , $C(u)$ ve $C(-u)$ nun ayrık birleşimidir: $v \in \mathcal{T}$ ise $\langle u, v \rangle \neq 0$ olur ve bu nedenle $v \in C(u)$ veya $v \in C(-u)$ dur. Bundan başka, $C(u) \cap C(-u) = \emptyset$ dir. Timelike konilerin bazı özellikleri aşağıdaki gibidir.

Önerme 2.1.14.

1. $\langle u, v \rangle < 0 \Leftrightarrow u$ ve v aynı timelike konide yatan iki timelike vektördür.
2. $C(u) = C(v) \Leftrightarrow u \in C(v)$ dir.

İspat

1. $\langle u, v \rangle < 0$ ise $u \in C(v)$ dir. $u, v \in C(w)$ olduğu varsayalım. $\langle w, w \rangle = -1$ olduğu düşünülebilir. $x, y \in \langle w \rangle^\perp$ ve $(a, b) \in \mathbb{R}$ den, $u = x + aw$ ve $v = y + bw$ olsun. $\langle w \rangle^\perp$ bir spacelike alt uzay olduğundan, $|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$ ve

$$\langle u, v \rangle = -ab + \langle x, y \rangle \leq -ab + |x||y|. (*)$$

olur. Fakat $\langle x, x \rangle < a^2$ and $\langle y, y \rangle < b^2$ dir. O halde $|x| < |a|$, $|y| < |b|$ ve (*) ın sonucu olarak $\langle u, v \rangle < 0$ olur.

2. $u \in C(v)$ ise $\langle u, v \rangle < 0$ olur, yani $v \in C(u)$ dir.

2.2 İki Vektör Arasındaki Aç

Bu bölümde, Lorentz-Minkowski uzayında iki vektör arasındaki açı tanımlanacaktır. Lightlike vektörlerin normu sıfır olduğu için sadece spacelike veya timelike iki vektör arasındaki açı tanımlanacaktır. Buna ek olarak, açı kavramının geometrik yorumu da yapılacaktır.

Tanım verilmeden önce, Öklid uzayındaki açı kavramı ele alınacaktır. \mathbb{E}^n Öklid uzayındaki anahtar Cauchy-Schwarz eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik $u, v \in \mathbb{E}^n$ ise ve $u, v \neq 0$ iken

$$\langle u, v \rangle^2 \leq |u|^2 |v|^2$$

olduğunu söyler ve ancak u ve v lineer bağımlı iseler eşitlik sağlanacağını belirtir. O halde,

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} \leq 1.$$

olur. Bundan dolayı bir tek $\varphi \in [0, \pi]$ sayısı vardır ve aşağıdaki şekilde verilir:

$$\cos \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|}.$$

φ sayısı u ve v arasındaki açı olarak adlandırılır. u ve v lineer bağımlı ise φ açısı 0 veya π dir ve eğer u ve v ortogonal ise φ açısı $\pi/2$ olur.

İki vektör arasındaki açının diğer özellikleri: Eğer bir vektörün yeri, diğer lineer bağımlı vektörler ile yönü aynı kalacak şekilde değiştirilirse açı değişmez ve izometrilere açıyı değişmez bırakır. Bu durum beraberinde iki vektör arasındaki açının sıradaki yorumunu getirir.

Önerme 2.2.1. \mathbb{E}^n Öklid uzayında iki birim vektör arasındaki açı, bu iki vektörün uçlarını birleştiren birim çemberdeki kısa yayın uzunluğudur (Şekil 2.3).

İspat Bu önermenin ispatı iki şekilde yapılacaktır.

u ve v , \mathbb{E}^n de iki birim vektör olsun. u ve v arasındaki φ açısı aşağıdaki şekilde verilir:

$$\cos \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} = \langle u, v \rangle.$$

İlk olarak, $\langle u, v \rangle^2 = 1$ olan aşık durum bir kenara bırakılırsa $u = v$ ve $\varphi = 0$ olur. $\langle u, v \rangle^2 = -1$ ise $v = -u$ ve $\varphi = \pi$ dir. Böylelikle yay parçasının uzunluğu yarımçember olan π olur. $\langle u, v \rangle^2 \neq 1$ olduğu varsayalım. u ve v vektörlerinin uç noktalarını birleştiren yay parçası aşağıdaki şekilde parametrize edilir. Bu parametrizasyonda w , u ya ortogonal birim vektördür ve u ile v tarafından gerilen düzlem içindedir.

$$\alpha(s) = \cos(s)u + \sin(s)w, s \in \mathbb{R}.$$

Aslında, w vektörünün ifadesi şu şekildedir:

$$w = \frac{1}{\sqrt{1 - \langle u, v \rangle^2}}(-\langle u, v \rangle u + v).$$

$\alpha(s_0) = v$ iken, yay parçasının uzunluğu

$$\int_0^{s_0} |\alpha'(s)| ds$$

olur. $\forall s$ için $|\alpha'(s)| = 1$ olduğundan uzunluk s_0 dir. s_0 in değeri şu şekilde hesaplanır: $\alpha(s_0) = v = \cos(s_0)u + \sin(s_0)w$ dir, u ile çarpılır ve

$$\langle u, v \rangle = \cos(s_0)\langle u, u \rangle = \cos(s_0)$$

elde edilir. $\cos \varphi = \langle u, v \rangle$ olduğu için $s_0 = \varphi$ dir.

İkinci ispat şöyledir: Bir izometriden sonra, şimdi de \mathbb{E}^2 de çalışılacaktır. u ve v , \mathbb{E}^2 de iki birim vektör olsun. İki vektörün de normları 1 olduğundan,

$$u = (\cos \theta, \sin \theta), v = (\cos \beta, \sin \beta)$$

gibi $\theta, \beta \in [0, 2\pi]$ açılarının varlığından söz edilir. $\beta \leq \theta$ olduğu varsayalım. u ve v arasındaki φ açısı aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\cos \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} = \cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta = \cos(\theta - \beta) = \cos(\beta - \theta).$$

O halde, $k \in \mathbb{Z}$ olan bazı k lar için $\varphi + (\theta - \beta) = 2k\pi$ veya $\varphi + (\beta - \theta) = 2k\pi$ olur. $\varphi \in [0, \pi]$ ve $\theta, \beta \in [0, 2\pi]$ olduğundan $\varphi + (\theta - \beta) \in [0, 3\pi]$ ve $\varphi + (\beta - \theta) \in [-2\pi, \pi]$ dir. $\varphi \in [0, \pi]$ olduğu için ilk durumda $k = 1$ ve ikinci durumda $k = 0$ olur. Bu da $\varphi = 2\pi + \beta - \theta$ veya $\varphi = \theta - \beta$ olduğuna işaret eder.

Birim çember $\alpha(\theta) = u$ ve $\alpha(\beta) = v$ ile $\alpha(s) = (\cos s, \sin s)$ olarak parametrize edilir. u ve v vektörlerinin uçlarını birleştiren birim çemberdeki kısa yayın uzunluğu $\alpha([\beta, \theta])$ veya $\alpha([\theta - 2\pi, \beta])$ dir. $|\alpha'(s)| = 1$ olduğu için bu yay parçasının uzunluğu:

$$\int_{\beta}^{\theta} |\alpha'(s)| ds = \int_{\beta}^{\theta} 1 ds = \theta - \beta$$

veya

$$\int_{\theta-2\pi}^{\beta} |\alpha'(s)| ds = \int_{\theta-2\pi}^{\beta} 1 ds = 2\pi + \beta - \theta$$

olur. İki durum için de sonuç elde edilmiş olur.

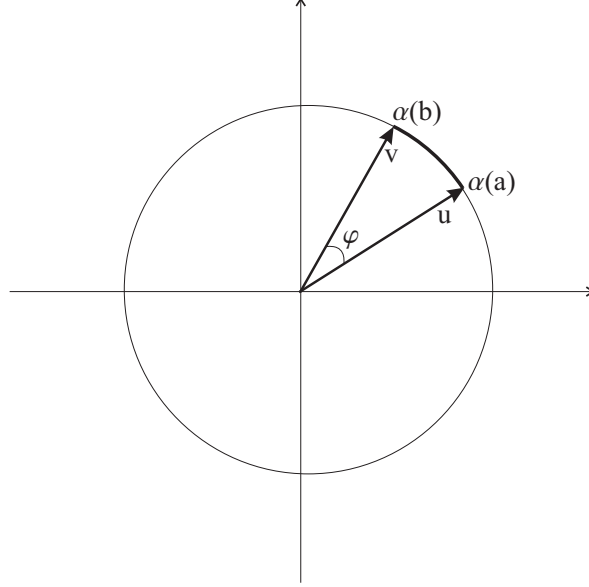
İki timelike vektör arasındaki açının tanımı ile devam edilecektir. Öklid uzayında olduğundan bu tip vektörler için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin bir tipine ihtiyaç vardır. Bu eşitsizlik iki timelike vektör arasındaki açının tanımını yapmaya olanak sağlar.

Teorem 2.2.2. u ve v iki timelike vektör olsun. O halde

$$|\langle u, v \rangle| \geq |u||v| \tag{2.1}$$

dir, ancak ve ancak u ile v lineer bağımlı olduğunda eşitlik sağlanır.

İspat u ve v lineer bağımlı ise eşitlik sağlanır. Şimdi u ve v iki lineer bağımsız vektör olduğu varsayalım. Önerme 2.1.9 ile, u ve v bir timelike $P = \langle u, v \rangle$ düzlemini gererler.



Şekil 2.3 Öklid uzayında iki birim vektör arasındaki açı

Tekrar Önerme 2.1.9 ile, P de iki lineer bağımsız lightlike vektör olduğu söylenir. Bu da, a ve b ye bağlı eşitliğin aşağıdaki gibi verildiği anlamına gelir:

$$\langle au + bv, au + bv \rangle = a^2 \langle u, u \rangle + b^2 \langle v, v \rangle + 2ab \langle u, v \rangle = 0$$

dır ve iki çözümü vardır. Ayrıca $a \neq 0$ dır (aksi halde, bv vektörü lightlike olurdu). Aşağıdaki şekilde a ya bölünürse:

$$\langle u, u \rangle + 2\lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle = 0$$

olur ve λ ya bağlı olarak iki farklı sonucu vardır. Özellikle, kuadratik denklemlerin diskriminantı şu şekilde pozitif olmak zorundadır:

$$\langle u, v \rangle^2 > \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle. \quad (2.2)$$

Bu da, eşitsizliğin u ve v nin lineer bağımsız olduğu durumda gerçekleştiğini gösterir.

Aynı *timelike konide* yatan iki timelike vektör arasındaki açı, (2.1) eşitsizliği kullanılarak tanımlanır. u ve v aynı timelike konide yatıyorsa, $\langle u, v \rangle < 0$ olur ve (2.1) eşitsizliği

$$\frac{-\langle u, v \rangle}{|u||v|} \geq 1$$

olduğunu belirtir. Hiperbolik kosinüs fonksiyonu $\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ olduğundan $1 - 1$ dir ve tek bir φ sayısı vardır:

$$\cosh \varphi = \frac{-\langle u, v \rangle}{|u||v|}.$$

Tanım 2.2.3. Aynı timelike konide yatan iki timelike vektör u and v arasındaki φ açısı,

$$\cosh \varphi = \frac{-\langle u, v \rangle}{|u||v|}$$

ile verilen $\varphi \in [0, \infty)$ sayıdır.

Bazı textlerde φ açısı hiperbolik açı (O'Neill 1983, s. 144) veya timelike açı (Ratcliffe 2006, s. 59) olarak adlandırılır.

Örnek 2.2.4. Önerme 2.1.8, ortogonal timelike vektörlerin olmadığını söyler. Fakat açısı $\pi/2$ olan timelike vektörler vardır: \mathbb{E}_1^2 de $u = (0, 1)$ ve $v = (\sinh(\pi/2), \cosh(\pi/2))$ timelike vektörleri arasındaki açı $\varphi = \pi/2$ dir.

Öklid uzayında verildiği gibi (Önerme 2.2.1), iki timelike vektör arasındaki açının yorumu da verilecektir. Vektörler pozitif bir sayı ile çarpıldığında açının değişmediği aşikardır. Bu nedenle, sadece birim timelike vektörler ele alınacaktır. Öncelikle, \mathbb{E}_1^n Lorentz-Minkowski uzayında 'çember' tanımlanmalıdır. Çemberin düzlemsel bir eğri olması gerektiğinden, sadece \mathbb{E}_1^2 Lorentz-Minkowski düzleminde çalışılacaktır.

\mathbb{E}_1^2 de iki 'farklı' birim çemberler vardır. Birim timelike vektörler kümesi ve birim spacelike vektörler sırasıyla:

$$\{u = (x, y) \in \mathbb{E}_1^2; \langle u, u \rangle = -1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 = -1\}$$

ve

$$\{u = (x, y) \in \mathbb{E}_1^2; \langle u, u \rangle = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 = 1\}$$

dir. Bu kümelerden her birinin *birim çemberler* olarak adlandırılan iki elemanı vardır. İkisi şu şekilde ayırt edilir:

$$\mathbb{H}^1 = \{u \in \mathbb{E}_1^2; \langle u, u \rangle = -1, y > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 = -1, y > 0\}$$

$$\mathbb{S}_1^1 = \{u \in \mathbb{E}_1^2; \langle u, u \rangle = 1, x > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 = 1, x > 0\}$$

Bu durumda (timelike vektörler) çalışılırken \mathbb{H}^1 çemberi kullanılacaktır.

Teorem 2.2.5. Aynı timelike konide yatan iki birim timelike vektör arasındaki açı, bu iki vektörün uçlarını birleştiren birim çemberdeki kısa yayın uzunluğudur (Şekil 2.4).

İspat u ve v aynı timelike konide yatan iki birim timelike vektör olsun. Genel durumu bozmadan, $u, v \in \mathbb{H}^1$ olduğu varsayalım. \mathbb{H}^1 in tanımından $\theta, \beta \in \mathbb{R}$ açıları vardır ve şu şekilde verilir: $u = (\sinh \theta, \cosh \theta)$, $v = (\sinh \beta, \cosh \beta)$.

$\theta \leq \beta$ olduğu varsayalım. Tanım yardımıyla u ve v arasındaki açı φ hesaplandığında,

$$\cosh(\varphi) = \frac{-\langle u, v \rangle}{|u||v|} = -\langle u, v \rangle = -(\sinh \theta \sinh \beta - \cosh \theta \cosh \beta) = \cosh(\theta - \beta)$$

olduğu görülür. φ ve $\beta - \theta$ negatif olmadığı için $\varphi = \beta - \theta$ sonucuna varılır.

Diğer taraftan, u and v arasındaki \mathbb{H}^1 uzunluğu aşağıdaki şu şekilde hesaplanır.

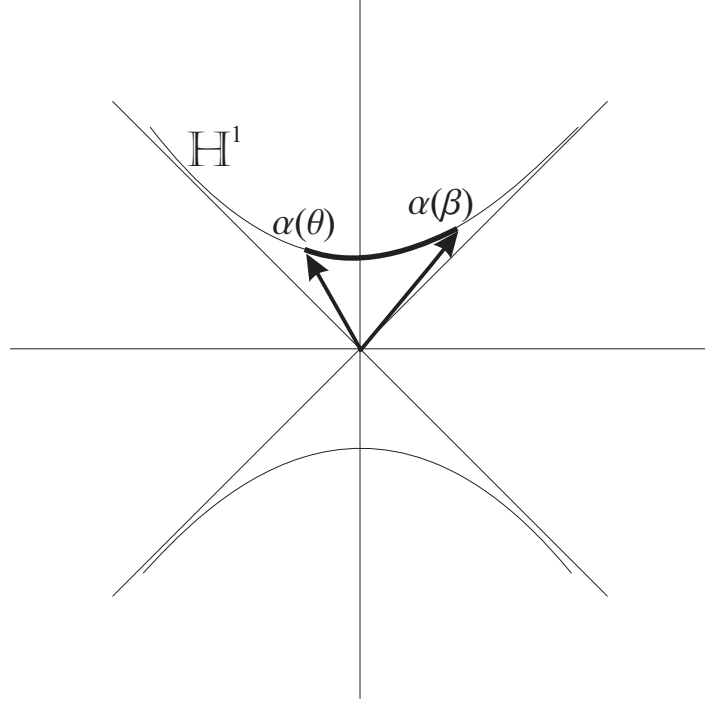
\mathbb{H}^1 in parametrizasyonu, $\alpha(\theta) = u$ ve $\alpha(\beta) = v$ ile $\alpha(s) = (\sinh(s), \cosh(s))$ dir.

$|\alpha'(s)| = 1$ olduğundan aranılan uzunluk α :

$$\int_{\theta}^{\beta} |\alpha'(s)| ds = \int_{\theta}^{\beta} 1. ds = \beta - \theta$$

olur ve sonuçtan görüldüğü üzere φ açıdır.

Uyarı 2.2.6. Bu teorem, iki timelike vektör arasındaki açının tanımında, uygulamaya konulan durumda, iki timelike vektörün de aynı koniye ait olmak zorunda olduğunu doğrular: Eğer vektörler farklı timelike konide iseler, birim timelike vektörlerin kümesinin iki farklı elemanında bulunmuş olurlar ve bu durumda vektörlerin iki ucunu birleştiren bir çemberden söz edilemez.



Şekil 2.4 Lorentz-Minkowski uzayında iki birim timelike vektör arasındaki açı

Uyarı 2.2.7. $u = (\sinh \theta, \cosh \theta)$ olarak yazıldığında θ sayısı 'açı' anlamındadır. Aslında θ , u ve $(0, 1)$ arasındaki açıdır:

$$\cosh(\theta) = \frac{-\langle u, (0, 1) \rangle}{|u|(0, 1)}.$$

İki timelike vektör arasındaki açının tanımı yapılır yapılmaz iki spacelike vektör arasındaki açı ile devam edilecektir. Bundan dolayı ve Tanım 2.2.3 in ardından, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin iki spacelike vektör için gerekli bir tipine ihtiyaç vardır. İki vektör tarafından gerilen düzleme ait causal karaktere bağlı olarak, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin üç farklı tipi elde edilecektir.

Teorem 2.2.8. u ve v \mathbb{E}_1^n de lineer bağımsız iki spacelike vektör ve $P = \langle u, v \rangle$ düzlemi u ve v vektörleri tarafından gerilsin.

1. P düzlemi spacelike olur $\Leftrightarrow |\langle u, v \rangle| < |u||v|$.
2. P düzlemi timelike olur $\Leftrightarrow |\langle u, v \rangle| > |u||v|$.
3. P düzlemi lightlike olur $\Leftrightarrow |\langle u, v \rangle| = |u||v|$.

İspat Teorem 2.2.2 ile devam edilecektir. $\lambda \in \mathbb{R}$ ve

$$\mathcal{P}(\lambda) = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \lambda^2 |v|^2 + 2\lambda \langle u, v \rangle + |u|^2$$

olsun. $\mathcal{P}(\lambda)$ nın diskriminantı

$$\Delta = 4(\langle u, v \rangle^2 - |u|^2 |v|^2)$$

olur.

1. Ancak ve ancak P deki tüm vektörler spacelike olduğunda, P spacelike bir düzlem olur, $\mathcal{P}(\lambda) > 0$ ifadesi her λ içindir. Bu, Δ negatif olmak zorundadır ifadesi ile eşdeğerdir.

2. Ancak ve ancak iki lineer bağımsız lightlike vektör var olduğunda, P timelike bir düzlem olur (Önerme 2.1.9). Bu da, $\mathcal{P}(\lambda) = 0$ denkleminin en az iki çözümü olduğu ve Δ nın pozitif olmak zorunda olduğu anlamına gelir.

3. Ancak ve ancak P de lightlike vektörlerin bir 1-boyutlu alt uzayı kesinlikle bulunuyor ise, P düzlemi lightlike olur (Önerme 2.1.10). Bu da, $\mathcal{P}(\lambda) = 0$ eşitliğinin tek bir çözümü olduğunu ve Δ nın sıfır olmak zorunda olduğunu söylemek ile eşdeğerdir.

Devam edilmeden önce, (2.2) eşitsizliği gibi Teorem 2.2.8 in de yeni bir ispatı yapılacaktır. İlk olarak hatırlanması gereken şudur:

Eğer (V^n, g) bir n -boyutlu vektör uzayın metriği ve B ile B' de V nin iki bazı ise

$$M_B(g) = Q M_{B'}(g) Q^t$$

olur, burada $M_B(g)$ ve $M_{B'}(g)$ g metriğinin sırasıyla B ve B' ne göre matris gösterimleridir. Q da B ile B' arasında değişen bazların matrisidir. Özellikle, $M_B(g)$ ve $M_{B'}(g)$ matrislerinin determinantlarının işaretleri aynı olmak zorundadır. \mathbb{E}_1^n Lorentz-Minkowski uzayında V ve u ile v vektörlerinin gerdiği bir P düzlemi olsun. Önerme 2.1.6 ile, P nin spacelike, timelike veya lightlike bir düzlem olduğu söylenir. Eğer B' ve P nin ortonormal bazı seçilirse $M_{B'}(\langle, \rangle)$ nün determinantı sırasıyla 1, -1 ve 0 olur.

Eğer $B = \{u, v\}$ alırsa $M_B(\langle, \rangle)$ nin determinantı sırasıyla pozitif, negatif veya sıfır olur. Fakat

$$M_B(\langle, \rangle) = \begin{pmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle \\ \langle u, v \rangle & \langle v, v \rangle \end{pmatrix}$$

dir ve determinantı

$$\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2$$

olur. Bu determinant hesabı u ve v vektörlerinin spacelike, timelike veya lightlike oluşlarından bağımsızdır. u ve v nin spacelike olduğu durumda bu determinant $-\Delta$ ile aynı işaretli olur (Teorem 2.2.8). u ve v vektörlerinin her ikisi de timelike ise P düzlemi timelike olmak zorundadır (Önerme 2.1.9) ve determinant negatiftir. Bu, (2.2) eşitsizliğini ispatlar.

Spacelike bir düzlemi geren iki spacelike vektörün arasındaki açının tanımı aşağıdaki şekilde verilir.

Tanım 2.2.9. u ve v spacelike bir düzlemi geren iki lineer bağımsız spacelike vektör olsunlar. u ve v arasındaki açı, tek bir $\varphi \in [0, \pi]$ sayısıdır ve

$$\cos \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|}$$

dir.

Aslında bu durumda açığı *tanımlamaya* gerek yoktur: İndirgenmiş metrik ile verilen $P = \langle u, v \rangle$ düzlemi, pozitif tanımlı metrik ile verilen vektör uzayıdır ve bu *Öklid* vektör uzayındaki açının tanımı olarak bililir.

Örnek 2.2.10. u ve v , \mathbb{E}_1^3 de ortogonal fakat \mathbb{E}^3 te ortogonal olmayan, ($z \neq 0$) spacelike düzlemini geren iki spacelike vektör olsun. Vektörler $u = (0, 2, 1)$ ve $v = (2, 1, 2)$ olacak şekilde seçilsin. Bu iki vektör arasındaki açı $\varphi = \pi/2$ dir. u ve v arasındaki açı \mathbb{E}^3 te hesaplanırsa, $\pi/2$ den farklı bir sonuç elde edilecektir.

$$\cos \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} = \frac{4}{45} \neq 0.$$

\mathbb{E}^n Öklid uzayında olduğundan Önerme 2.2.1 de aynı sonuç elde edilmişti.

Teorem 2.2.11. u ve v , spacelike bir düzlemi geren iki lineer bağımsız birim spacelike vektör olsunlar. u ve v arasındaki açı u ve v vektörlerinin uçlarını birleştiren, $P = \langle u, v \rangle$ düzlemindeki birim çembere ait kısa yayın uzunluğudur.

P deki birim çember, P deki normu 1 olan vektörlerin kümesidir:

$UP = \{w \in P; \langle w, w \rangle = 1\}$. Bu teoremin ispatı yapılmayacaktır çünkü daha sonra Teorem 2.3.1de iki vektör arasındaki açının izometrilere ile değişmez kaldığı görülecektir. Çalışılan bu durumda, \mathbb{E}_1^n in bir izometrisi u ve v vektörlerinin geldiği varsayılan $\langle (1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0) \rangle$ düzlemine uygulanabilir. O halde bu düzlem \mathbb{E}^2 ye izometrik olur ve ispat Önerme 2.2.1 deki aynı basamakları izler.

Bu kümenin bağlantılı olması, Öklid uzayında olduğu gibi UP çemberinin tanımının direkt bir sonucu değildir. P nin $z = 0$ düzlemi olduğu özel bir durumda, UP birim çemberi \mathbb{E}^2 deki standart (Öklid) çemberidir. Fakat \mathbb{E}_1^3 de ve genel bir spacelike P düzlemi için, UP Öklid anlamındaki bir çember değildir: aslında bu durum *sadece* P düzleminin $z = 0$ olduğu zaman gerçekleşir.

Örnek 2.2.12. $u = (0, 2, -1)$ ve $v = (1, 0, 0)$ \mathbb{E}_1^3 de spacelike bir düzlemi geren iki spacelike vektör olsun.

$$\begin{aligned} P &= \{x(0, 2, -1) + y(1, 0, 0) \in \mathbb{E}_1^3; |\dots| = 1\} = \\ &= \{(y, 2x, -x) \in \mathbb{E}_1^3; y^2 + 3x^2 = 1\} \\ &= \{(y, 2x, -x) \in \mathbb{E}_1^3; \frac{x^2}{(1/\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{1} = 1\} \end{aligned}$$

olur ve P düzlemi içinde bir (afin) elipstir.

Önerme 2.2.13. \mathbb{E}_1^n in bir spacelike düzlemindeki spacelike birim vektörlerin kümesi bağlantılıdır. Aslında bu bir (afin) elipstir.

İspat $u, v \in \mathbb{E}_1^n$, P spacelike düzlemi içinde iki birim spacelike vektör olsun. Bir $\phi : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ izometrisi ile $\phi(u) = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ve $\phi(v) = e_2 = (0, 1, \dots, 0)$ alınsın, o halde $\phi(P) = \langle e_1, e_2 \rangle$ olur. UP birim çemberi $\phi(P)$ üzerindeki $\phi(UP)$ birim çemberine taşınır. Fakat $\phi(P)$ deki çember Öklid anlamındaki çemberdir. ϕ bir afin dönüşüm olduğundan, UP bir elips olmak zorundadır.

Şimdi, bir timelike düzlem içinde bulunan iki spacelike vektör arasındaki açının tanımı yapılacaktır.

Tanım 2.2.14. u ve v bir timelike düzlemi geren $\langle u, v \rangle > 0$ gibi iki lineer bağımsız spacelike vektör olsun. u ve v arasındaki açı tek bir $\varphi \in [0, \infty)$ sayısıdır ve aşağıdaki gibidir.

$$\cosh \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|}.$$

Teorem 2.2.15. u ve v bir timelike düzlemi geren $\langle u, v \rangle > 0$ gibi iki lineer bağımsız spacelike vektör olsun. u ve v arasındaki açı, bu vektörlerin uçlarını birleştiren $P = \langle u, v \rangle$ düzlemindeki birim çembere ait kısa yayın uzunluğudur.

İspat P düzleminin sadece \mathbb{E}_1^2 Minkowski düzlemi olduğu düşünölsün. \mathbb{E}_1^2 deki birim spacelike vektörlerin kümesi şöyledir:

$$UP = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 = 1\}.$$

Dolayısıyla UP deki herhangi bir vektör $(\pm \cosh(t), \sinh(t))$ şeklinde yazılır. O halde,

$$u = (\pm \cosh \theta, \sinh \theta), v = (\pm \cosh \beta, \sinh \beta)$$

de göröldüğü üzere bir θ ve β nın varlığından söz edilir. $\langle u, v \rangle > 0$ olduğundan, genel ifadeyi bozmadan, u ve v nin ilk koordinatlarının pozitif olduğu varsayılabilir (Şekil 2.5). $\theta \leq \beta$ olduğu varsayölsün. u ve v arasındaki açı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\langle u, u \rangle = 1, \quad \langle v, v \rangle = 1$$

$$\langle u, v \rangle = \cosh \theta \cosh \beta - \sinh \theta \sinh \beta = \cosh(\theta - \beta).$$

$$\cosh \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} = \cosh(\theta - \beta).$$

Açımın tanımı kullanılarak ve $\theta - \beta \leq 0$ olduğundan, $\varphi = \beta - \theta$ olur.

Şimdi u ve v arasındaki UP uzunluğu hesaplanabilir. UP nin parametrizasyonu $\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t))$ dir. $a = \theta$ için, $\alpha(a) = u$ ve $b = \beta$ için $\alpha(b) = v$ elde edilir.

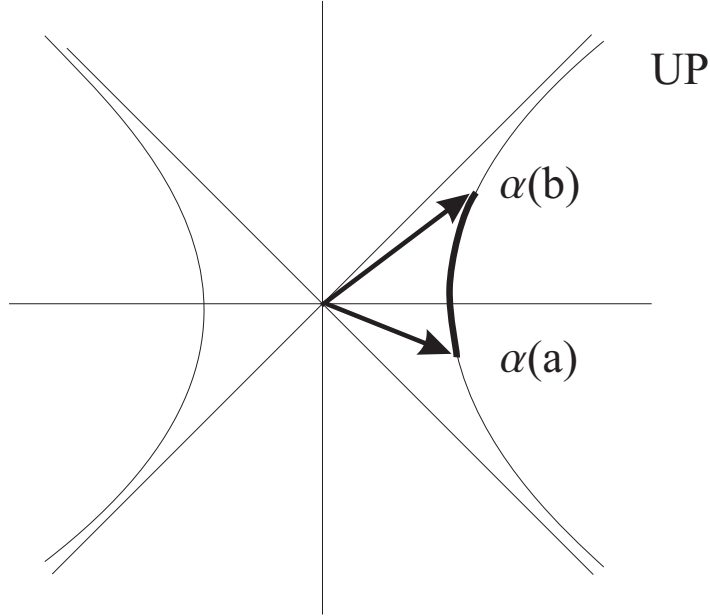
$$\alpha'(t) = (\sinh(t), \cosh(t)),$$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{|\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle|} = \sqrt{-\sinh^2(t) + \cosh^2(t)} = 1.$$

olduğundan dolayı hesaplanan uzunluk:

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt = \int_\theta^\beta 1 dt = \beta - \theta$$

olur.



Şekil 2.5 Timelike bir düzlemdeki iki spacelike vektör arasındaki açı

2.3 \mathbb{E}_1^n in İzometrileri

Bu bölümde \mathbb{E}_1^n Lorentz-Minkowski uzayına ait izometrilere çalışılacaktır. $f : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_1^n$, \mathbb{E}_1^n in bir izometrisi olsun, $\forall u, v \in \mathbb{E}_1^n$ için $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ dir. \mathbb{E}_1^n e ait bir $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal baza göre f nin matrisi A olsun. $g = \langle, \rangle$ olduğunda $G = M_g(B, B)$ olur. $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv x$ ve $v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \equiv y$

olsun.

O halde, $f(u) = M(f, B, B)x$, $f(v) = M(f, B, B)y$ ve

$$\langle f(u), f(v) \rangle = x^T A^T G A$$

$$\langle u, v \rangle = x^T G y$$

olur. Çünkü bu, $\forall x, y$ için sağlanır. Dolayısıyla A matrisi,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

iken, $A^t G A = G$ yi sağlar.

Herhangi bir izometriye ait eigen değerler 1 veya -1 olduğu için, \mathbb{E}_1^n in ortonormal bir bazı şu durumda seçilebilir: A ya karşılık gelen matris, esas köşegende sadece 1, -1 ve 2×2 -lik kutular (her biri köşegenleştirilebilir olmayan) olan kutular ile oluşturulduğunda. 2×2 -lik kutuların her biri bir vektör uzayının izometrilerine karşılık geldiği için, \mathbb{E}_1^2 deki izometrilere çalışmanın problemleri ile devam edilecektir.

$f : \mathbb{E}_1^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^2$, \mathbb{E}_1^2 de bir izometri olsun. $B = \{e_1, e_2\}$ ortonormal baz ise, f nin matrisi A , $A^t G A = G$ yi sağlar,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^t G A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix}. \text{ Dolayısıyla,}$$

$$a^2 - c^2 = 1$$

$$b^2 - d^2 = -1$$

$$ab - cd = 0$$

olur. İlk iki denkleme göre durumlar ayırt edilecektir.

1. $a = \cosh \theta$, $b = \sinh \varphi$, $c = \sinh \theta$ ve $d = \cosh \varphi$.
O halde üçüncü dekleme şöyledir: $-\sinh(\theta - \varphi) = 0$ Dolayısıyla, $\theta = \varphi$ olur. A matrisinin gösterimi de aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}, \det(A) = 1$$

2. $a = -\cosh \theta$, $b = \sinh \varphi$, $c = \sinh \theta$ and $d = \cosh \varphi$.
O halde üçüncü dekleme şöyledir: $\sinh(\theta + \varphi) = 0$ Dolayısıyla, $\varphi = -\theta$ olur. A matrisinin gösterimi de aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{pmatrix} -\cosh \theta & -\sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}, \det(A) = -1$$

3. $a = \cosh \theta$, $b = \sinh \varphi$, $c = \sinh \theta$ and $d = -\cosh \varphi$.
O halde üçüncü dekleme şöyledir: $\sinh(\theta + \varphi) = 0$ Dolayısıyla, $\varphi = -\theta$ olur. A matrisinin gösterimi de aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ \sinh \theta & -\cosh \theta \end{pmatrix}, \det(A) = -1$$

4. $a = -\cosh \theta$, $b = \sinh \varphi$, $c = \sinh \theta$ and $d = -\cosh \varphi$.
O halde üçüncü dekleme şöyledir: $-\sinh(\theta - \varphi) = 0$ Dolayısıyla, $\theta = \varphi$ olur. A matrisinin gösterimi de aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{pmatrix} -\cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & -\cosh \theta \end{pmatrix}, \det(A) = 1$$

Teorem 2.3.1. f , \mathbb{E}_1^n in bir izometrisi ise, $f(u)$ ve $f(v)$ arasındaki açı $A(u)$ ve $A(v)$ arasındaki açı ile aynıdır.

İspat Sadece timelike vektörler için ispat yapılacaktır. Eğer u birim vektörü timelike ise, $f(u)$ birim timelike vektör olur. Bundan başka, u ve v aynı timelike konide yatıyorsa,

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle < 0$$

olur. u ve v arasındaki φ açısı $\varphi \in [0, \infty)$ iken şöyledir:

$$\cosh \varphi = -\frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|}.$$

$f(u)$ ve $f(v)$ arasındaki açı θ dır,

$$\cosh \theta = -\frac{\langle f(u), f(v) \rangle}{|f(u)||f(v)|} = -\frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} = \cosh \varphi.$$

Sonuç olarak, $\varphi = \theta$ dır.

\mathbb{R}^n in her B bazı için pozitif yönlendirilme yapıldığında, bir $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ izomorfizminin yönü koruduğu hatırlanır, o halde $f(B)$ pozitif yönlendirilmiştir. Bu, f nin determinantının pozitif olduğunu söylemek ile eşdeğerdir. \mathbb{E}_1^n in izometrilerinin determinantı $+1$ veya -1 olduğundan, determinantı $+1$ olan izometrilere yönü korurlar.

$B = \{e_1, \dots, e_n\}$, e_n timelike vektör iken, \mathbb{E}_1^n in bir ortogonal bazı olsun. $e_n, (0, \dots, 0, 1)$ vektörü ile aynı timelike konide yatıyorsa, B ye geleceğe yönlendirilmiş (future-directed) baz denir.

Tanım 2.3.2. $f : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ bir izometri olsun. Eğer her ortogonal geleceğe yönlendirilmiş B bazı için $f(B)$ de geleceğe yönlendirilmiş bir baz oluyor ise, f nin timelike yönlendirmeyi korur denir.

Önerme 2.3.3. $f : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ bir izometri olsun ve $A = (a_{ij})$, \mathbb{E}_1^n in bir olağan bazına göre f nin matris gösterimi olsun. $a_{nn} > 0 \Leftrightarrow f$ timelike yönlendirmeyi korur.

İspat f dönüşümü

$$\langle f(e_n), e_n \rangle = \langle f(e_n), (0, \dots, 0, 1) \rangle < 0$$

timelike yönlendirmesini korur. Çünkü

$$f(e_n) = \sum_{i=1}^n a_{in} e_n,$$

$\langle f(e_n), e_n \rangle = -a_{nn}$. Then $\langle f(e_n), e_n \rangle < 0$ if $a_{nn} > 0$ dir.

$O_1(n)$, \mathbb{E}_1^3 in tüm vektör izometrilerin kümesini ifade etsin ve $O_1(3)$ ile gösterilsin.

$$O_1(3) = \{A \in Gl(3, \mathbb{R}); A^tGA = G\}.$$

Sıradaki dört küme şu şekilde olacaktır:

$$O_1^{++}(n) = \{A \in =_1(n) : a_{nn} > 0, \det(A) = 1\}$$

$$O_1^{+-}(n) = \{A \in =_1(n) : a_{nn} > 0, \det(A) = -1\}$$

$$O_1^{-+}(n) = \{A \in =_1(n) : a_{nn} < 0, \det(A) = 1\}$$

$$O_1^{--}(n) = \{A \in =_1(n) : a_{nn} < 0, \det(A) = -1\}.$$

3. İZOMETRİK UZAYLAR ARASINDAKİ DUAL DÖNÜŞÜMLER

3.1 Dual Dönüşüm

Bu bölümde önemli rol oynayacak $n \times n$ -lik matrislerin iki kümesi aşağıdaki gibidir.

$$SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^t A = AA^t = I_n, \det(A) = 1\},$$

$$SO(n-1, 1) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^t G A = A G A^t = G, \det(A) = 1\},$$

buradaki G matrisi, $G = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right)$ dir. Buradaki I_n , $n \times n$ -lik birim matristir.

Birinci küme, \mathbb{E}^n Öklid uzayındaki izometrilere ile oluşturulmuştur ve bu izometrilere \mathbb{R}^n deki yönlendirmeyi korurlar. İkinci küme olarak ifade edilen $SO(n-1, 1)$, \mathbb{E}_1^n Minkowski uzayındaki determinanı 1 olan izometrilere dir (Bkz. 1.Bölüm).

Bu ve bundan sonraki bölümde, $n \times n$ -lik matrisler aşağıda verilen A matrisi gibi kutulara bölünmüş şekilde yazılacaktır,

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & a_{nn} \end{array} \right)$$

burada $a_{nn} \neq 0$ dır. Buradaki B , $(n-1) \times (n-1)$ -lik bir kare matris; C , $(n-1) \times 1$ -lik bir sütun matrisi ve D bir satır matrisidir. Bu matriste, $a_{nn} \neq 0$ olduğu için, $X = \{A \in SO(n); a_{nn} \neq 0\}$ ve $Y = \{A \in SO(n-1, 1); a_{nn} \neq 0\}$ kümeleri kullanılacaktır.

$X = \{A \in SO(n); a_{nn} \neq 0\}$ ve $Y = \{A \in SO(n-1, 1); a_{nn} \neq 0\}$ kümeleri arasında, $f : X \rightarrow Y$ olacak şekilde bir dönüşüm tanımlanır ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$f : A \mapsto f(A) = \frac{1}{a_{nn}} \left(\begin{array}{c|c} a_{nn}(B^{-1})^t & C \\ \hline -D & 1 \end{array} \right),$$

buradaki t üstindisi matristeki transpozdur.

Şimdi, f nin iyi tanımlı olduğu gösterilmelidir. Öncesinde, sıradaki bir önerme ve iki lemma ispat edilecektir.

Önerme 3.1.1. $A \in X$ ise, $f(A) \in Y$ olur.

İspat $f(A)^t G f(A) = G$ ve $f(A) G f(A)^t = G$ olduğu ispatlanacaktır. A matrisi, $SO(n)$ kümesinin içindedir. Bundan dolayı $A, A^t A = A A^t = I$ eşitliğini sağlar. Bu ifade,

$$A A^t = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & a_{nn} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} B^t & D^t \\ \hline C^t & a_{nn} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} B B^t + C C^t & B D^t + a_{nn} C \\ \hline D B^t + a_{nn} C^t & D D^t + a_{nn}^2 \end{array} \right) = I$$

olduğu anlamına gelir.

Bu çarpım sonucunda elde edilen eşitlikler aşağıdaki gibi yazılır.

$$B B^t + C C^t = I_{n-1} \tag{3.1}$$

$$B D^t + a_{nn} C = D B^t + a_{nn} C^t = 0 \tag{3.2}$$

$$D D^t + a_{nn}^2 = 1 \tag{3.3}$$

$C = -\frac{B D^t}{a_{nn}}$ ve $C^t = -\frac{D B^t}{a_{nn}}$ (3.2)den elde edilir.

(3.1) kullanılarak,

$$B B^t + \frac{B D^t D B^t}{a_{nn}^2} = B \left(B^t + \frac{D^t D B^t}{a_{nn}^2} \right)$$

$$B B^{-1} = I \Rightarrow B^{-1} = B^t + \frac{D^t D B^t}{a_{nn}^2}$$

elde edilir.

Eşitliğin diğer tarafı ele alındığında,

$$A^t A = \left(\begin{array}{c|c} B^t & D^t \\ \hline C^t & a_{nn} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & a_{nn} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} B^t B + D^t D & B^t C + a_{nn} D^t \\ \hline C^t B + a_{nn} D & C^t C + a_{nn}^2 \end{array} \right) = I$$

olduğu görülür.

Bu çarpım sonucunda aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$B^t B + D^t D = I_{n-1} \quad (3.4)$$

$$B^t C + a_{nn} D^t = C^t B + a_{nn} D = 0 \quad (3.5)$$

$$C^t C + a_{nn}^2 = 1 \quad (3.6)$$

$D^t = -\frac{B^t C}{a_{nn}}$ ve $D = -\frac{C^t B}{a_{nn}}$ (3.5)ten elde edilir.

(3.4) kullanılarak,

$$B^t B + \frac{B^t C C^t B}{a_{nn}^2} = \left(B^t + \frac{B^t C C^t}{a_{nn}^2} \right) B$$

$$B^{-1} B = I \Rightarrow B^{-1} = B^t + \frac{B^t C C^t}{a_{nn}^2}$$

elde edilir.

A matrisinin, $A^t A = A A^t = I$ eşitliğini sağladığı görülür. Şimdi, $f(A)^t G f(A) = G$ ve $f(A) G f(A)^t = G$ olduğu ispatlanmalıdır.

$$f(A)^t G f(A) = \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & \frac{-D^t}{a_{nn}} \\ \hline \frac{C^t}{a_{nn}} & \frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} (B^{-1})^t & \frac{C}{a_{nn}} \\ \hline \frac{-D}{a_{nn}} & \frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & \frac{-D^t}{a_{nn}} \\ \hline \frac{C^t}{a_{nn}} & \frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} (B^{-1})^t & \frac{C}{a_{nn}} \\ \hline \frac{D}{a_{nn}} & -\frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} B^{-1}(B^{-1})^t - \frac{D^t D}{a_{nn}^2} & \frac{B^{-1}C}{a_{nn}} + \frac{D^t}{a_{nn}^2} \\ \hline \frac{C^t(B^{-1})^t}{a_{nn}} + \frac{D}{a_{nn}^2} & \frac{C^t C}{a_{nn}^2} - \frac{1}{a_{nn}^2} \end{array} \right)$$

Bu çarpım sonucunda elde edilen eşitlikler şu şekilde gösterilmelidir.

$$B^{-1}(B^{-1})^t - \frac{D^t D}{a_{nn}^2} = I_{n-1} \quad (3.7)$$

$$\frac{B^{-1}C}{a_{nn}} + \frac{D^t}{a_{nn}^2} = \frac{C^t(B^{-1})^t}{a_{nn}} + \frac{D}{a_{nn}^2} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{C^t C}{a_{nn}^2} - \frac{1}{a_{nn}^2} = -1 \quad (3.9)$$

(3.7)nin ispatında, B^{-1} kullanılmalıdır.

$$\begin{aligned} & \left(B^t + \frac{D^t D B^t}{a_{nn}^2} \right) \left(B + \frac{B D^t D}{a_{nn}^2} \right) - \frac{D^t D}{a_{nn}^2} = \\ & = \left(\frac{a_{nn}^2 B^t + D^t B^t}{a_{nn}^2} \right) \left(\frac{a_{nn}^2 B + B D^t D}{a_{nn}^2} \right) - \frac{D^t D}{a_{nn}^2} \\ & = \left(\frac{a_{nn}^4 B^t B + a_{nn}^2 B^t B D^t D + a_{nn}^2 D^t D B^t B + D^t D B^t B D^t D}{a_{nn}^4} \right) - \frac{D^t D}{a_{nn}^2} \end{aligned}$$

(3.4) ve (3.3)ten $B^t B = I - D^t D$ ve $DD^t = 1 - a_{nn}^2$ kullanılarak,

$$= \left(\frac{a_{nn}^4 I + D^t D a_{nn}^2}{a_{nn}^4} \right) - \frac{D^t D}{a_{nn}^2} = I$$

olduğu görülür.

B^{-1} , (3.8)in ispatında kullanılır.

$$\begin{aligned} & \frac{B^{-1}C}{a_{nn}} + \frac{D^t}{a_{nn}^2} = \frac{\left(B^t + \frac{B^t C C^t}{a_{nn}^2} \right) C}{a_{nn}} + \frac{D^t}{a_{nn}} \\ & = \frac{B^t C}{a_{nn}} + \frac{B^t C C^t C}{a_{nn}^3} + \frac{D^t}{a_{nn}} = \frac{B^t C}{a_{nn}} + \frac{B^t C}{a_{nn}^3} - \frac{B^t C}{a_{nn}} + \frac{D^t}{a_{nn}^2} \end{aligned}$$

(3.6) ve (3.5)ten $C^t C = 1 - a_{nn}^2$ ve $D^t = -\frac{B^t C}{a_{nn}}$ kullanılarak,

$$= \frac{B^t C}{a_{nn}} + \frac{B^t C}{a_{nn}^3} - \frac{B^t C}{a_{nn}} + \frac{B^t C}{a_{nn}^3} = 0$$

elde edilir.

(3.9)un, (3.6)dan elde edildiği açıktır.

$$\frac{CC^t - 1}{a_{nn}^2} = -1.$$

$f(A)Gf(A)^t$ çarpımı aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} f(A)Gf(A)^t &= \left(\begin{array}{c|c} (B^{-1})^t & \frac{C}{a_{nn}} \\ \hline \frac{-D}{a_{nn}} & \frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & \frac{-D^t}{a_{nn}} \\ \hline \frac{C^t}{a_{nn}} & \frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} (B^{-1})^t & \frac{C}{a_{nn}} \\ \hline \frac{-D}{a_{nn}} & \frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & \frac{-D^t}{a_{nn}} \\ \hline \frac{-C^t}{a_{nn}} & -\frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} (B^{-1})^t B^{-1} - \frac{CC^t}{(a_{nn})^2} & \frac{-(B^{-1})^t D^t}{a_{nn}} - \frac{C}{a_{nn}^2} \\ \hline \frac{-DB^{-1}}{a_{nn}} - \frac{C^t}{a_{nn}^2} & \frac{DD^t}{a_{nn}^2} - \frac{1}{a_{nn}^2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Bu çarpım sonucunda elde edilen eşitlikler şu şekilde gösterilmelidir.

$$(B^{-1})^t B^{-1} - \frac{CC^t}{a_{nn}^2} = I_{n-1} \quad (3.10)$$

$$-\frac{(B^{-1})^t D^t}{a_{nn}} - \frac{C}{a_{nn}^2} = \frac{-DB^{-1}}{a_{nn}} - \frac{C^t}{a_{nn}^2} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{DD^t}{a_{nn}^2} - \frac{1}{a_{nn}^2} = -1 \quad (3.12)$$

(3.10) un ispatında B^{-1} kullanılır.

$$\begin{aligned}
& (B + \frac{CC^t B}{a_{nn}^2})(B^t + \frac{B^t CC^t}{a_{nn}^2}) - \frac{CC^t}{a_{nn}^2} = \\
& = (\frac{a_{nn}^2 B + C^t C B}{a_{nn}^2})(\frac{a_{nn}^2 B^t + B^t CC^t}{a_{nn}^2}) - \frac{CC^t}{a_{nn}^2} \\
& = (\frac{a_{nn}^4 BB^t + a_{nn}^2 BB^t CC^t + a_{nn}^2 CC^t BB^t + CC^t BB^t CC^t}{a_{nn}^4}) - \frac{CC^t}{a_{nn}^2}
\end{aligned}$$

(3.1) ve (3.6)dan, $BB^t = I - CC^t$ ve $C^t C = 1 - a_{nn}^2$ kullanılarak,

$$= (\frac{a_{nn}^4 I + a_{nn}^2 CC^t}{a_{nn}^4}) - \frac{CC^t}{a_{nn}^2} = I$$

olduğu görülür.

B^{-1} , (3.11)in ispatında kullanılır.

$$\frac{-DB^{-1}}{a_{nn}} - \frac{C^t}{a_{nn}^2} = \frac{-D(B^t + \frac{D^t DB^t}{a_{nn}^2})}{a_{nn}} - \frac{C^t}{a_{nn}^2}$$

(3.4) ve (3.2)den, $B^t B = I - D^t D$ ve $C^t = -\frac{DB^t}{a_{nn}}$ kullanılarak

$$\frac{-a_{nn}^2 DB^t - DD^t DB^t + DB^t}{a_{nn}^3} = 0$$

elde edilir.

(3.12)nin, (3.3)ten geldiği açıktır.

$$\frac{DD^t - 1}{a_{nn}^2} = -1.$$

İspatın tamamlanması için, $f(A)$ nın determinantının $+1$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için aşağıdaki iki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 3.1.2. A matrisi $SO(n)$ kümesinde ise, $a_{nn} \neq 0$ olmak üzere $\frac{\det(B)}{a_{nn}} = 1$ dir.

İspat A matrisi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & a_{nn} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} B & \frac{-BD^t}{a_{nn}} \\ \hline D & a_{nn} \end{array} \right)$$

Bu matris, $\det(A)$ nın hesabı için, iki matrisin çarpımı şeklinde de yazılabilir.

$$= \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline D & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I & \frac{-D^t}{a_{nn}} \\ \hline 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right),$$

$$\det(A) = \det(B) \frac{1}{a_{nn}}$$

Sonuç olarak, bu durumda $\det(A) = 1$ dir, o halde $\det(B) = a_{nn}$ olarak elde edilir.

Lemma 3.1.3. A matrisi $SO(n-1, 1)$ kümesinde ise, $a_{nn} \neq 0$ olmak üzere $\det(B) \frac{1}{a_{nn}} = 1$ dir.

İspat A matrisi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & a_{nn} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} B & \frac{BD^t}{a_{nn}} \\ \hline D & a_{nn} \end{array} \right)$$

Bu matris, $\det(A)$ nın hesabı için, iki matrisin çarpımı şeklinde de yazılabilir.

$$= \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline D & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I & \frac{D^t}{a_{nn}} \\ \hline 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right),$$

O halde,

$$\det(A) = \det(B) \frac{1}{a_{nn}}$$

olduğu görülür.

Lemma 3.1.2 nin ispatının devamı için, $\det(A) = 1$, $\frac{\det(B)}{a_{nn}} = 1$ ve Lemma 3.1.3 kullanılır.

$$\det(f(A)) = \det((B^{-1})^t) \frac{1}{\frac{1}{a_{nn}}} = \frac{a_{nn}}{\det(B)} = 1$$

f nin iyi tanımlı olduğunun ispatından hemen sonra, $1 - 1$ ve örten olduğu gösterilmektedir. Bunun için $f^{-1} : Y \rightarrow X$, aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f^{-1} \left(\frac{B \mid C}{D \mid a_{nn}} \right) = \frac{1}{a_{nn}} \left(\frac{a_{nn}(B^{-1})^t \mid C}{-D \mid 1} \right)$$

Önerme 3.1.4. f , $1 - 1$ ve örtendir; f^{-1} , f nin inversidir.

İspat f nin $1 - 1$ ve örten olması, f^{-1} in iyi tanımlı olduğu anlamına gelir. Çünkü, $f \circ f^{-1} = I_Y$ ve $f^{-1} \circ f = I_X$. O halde, $f \circ f^{-1}(A) = I_Y(A)$ and $f^{-1} \circ f(A) = I_X(A)$.

$$(B'^{-1})^t = B, B'^{-1} = B^t, B' = (B^t)^{-1} = (B^{-1})^t,$$

$$\frac{C'}{x} = C, \frac{-D'}{x} = D$$

$$\frac{1}{x} = a_{nn}, C' = \frac{C}{a_{nn}}$$

$$D' = -xD = -\frac{1}{a_{nn}}D, x = \frac{1}{a_{nn}}$$

$f(A)$ ve $f^{-1}(A)$ için örnek verilebilecek özel matrisler aşağıdaki gibidir.

Örnek 3.1.5.

1. $A = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix}$ olarak alınan A matrisi $SO(2)$ kümesine aittir. $A \in \mathbb{X}$ olması için $a_{22} = \cos s \neq 0$ olmalıdır. Yani, $s \neq \pm \frac{\pi}{2}$ olur. f dual dönüşümü ile ,

$$f(A) = \frac{1}{\cos s} \begin{pmatrix} 1 & \sin s \\ \sin s & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sec(s) & \tan(s) \\ \tan(s) & \sec(s) \end{pmatrix} \text{ elde edilir.}$$

Dual dönüşüm ile elde edilen bu matris $SO(1, 1)$ kümesine aittir, 1.Bölümden hatırlanacak olursa, $SO(1, 1) = O_1^{++}(2) \cup O_1^{-+}(2)$ olarak ifade edilir. O halde $\theta \in \mathbb{R}$ açısına bağlı olarak $f(A)$,

$$\begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \text{ veya } \begin{pmatrix} -\cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & -\cosh(\theta) \end{pmatrix} \text{ olarak yazılır.}$$

θ açısının seçimi, $\cos(s)$ değerinin pozitif veya negatif oluşuna bağlıdır. İlk durumda, θ açısı $\cosh(\theta) = \sec(s)$ ve $\sinh(\theta) = \tan(s)$ eşitliklerini sağlamalıdır. $\sec(s)^2 - \tan(s)^2 = 1$ olduğundan, tek bir θ açısının varlığından söz edilir.

2.

$$B = \begin{pmatrix} \pm \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \pm \cosh t \end{pmatrix}$$

olarak alınan B matrisi $SO(1, 1)$ kümesine aittir. f dual dönüşümü ile,

$$f(B) = \frac{1}{\pm \cosh t} \begin{pmatrix} 1 & \sinh t \\ -\sinh t & 1 \end{pmatrix} (t \in \mathbb{R})$$

elde edilir, $SO(2)$ kümesine aittir.

Uyarı 3.1.6. f dönüşümü lineer değildir.

$$f(A + B) \neq f(A) + f(B)$$

4. DUAL DÖNÜŞÜMLERİN GEOMETRİK UYGULAMALARI

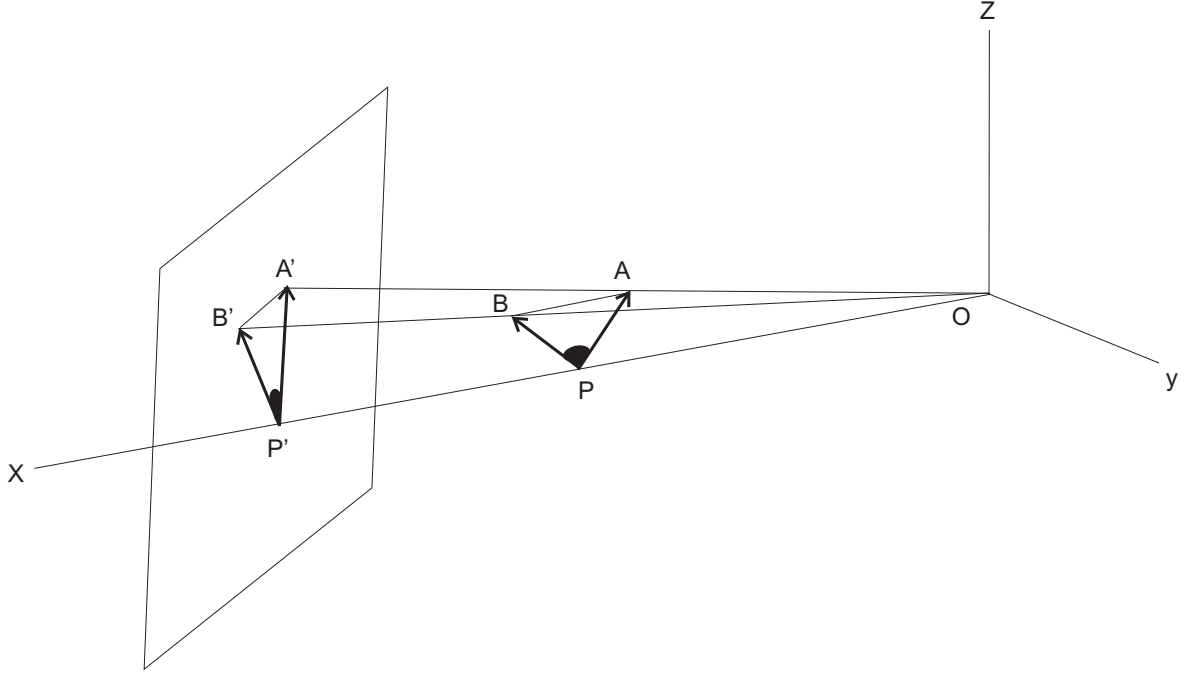
4.1 \mathbb{E}^3 Öklid Uzayında Görüş Açısı

$\angle APB$ sabit açısı, \mathbb{E}^3 üç boyutlu Öklid uzayında P , A ve B noktaları ile verilsin. Bu açıya bakıldığında açının görünümü görüş noktasına göre değişmektedir.

Tanım 4.1.1. $\angle APB$ açısı, \mathbb{E}^3 'te bir sabit açı olsun. Görüş noktası O olmak üzere, $\angle_o APB$ açısı, $OPAB$ bozulmuş dört yüzününün OPA ve OPB yüzleri arasında kalan iki düzlemli açı olarak ifade edilsin. $\angle_o APB$ açısına, O görüş noktasından $\angle APB$ açısının görüş açısı denir.

Şekil 4.1'de Öklid uzayındaki bir görüş açısı incelenebilir.

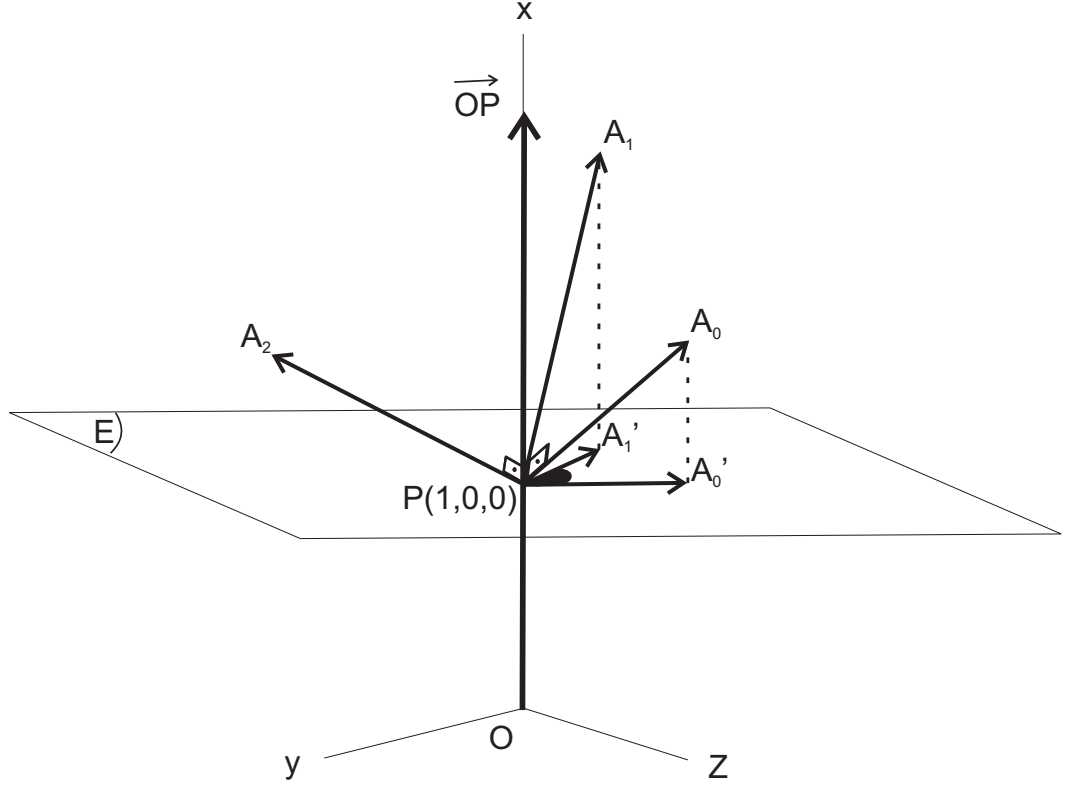
Uyarı 4.1.2. \mathbb{E}^n 'de ($n \geq 4$) görüş açısı tanımı, Tanım 4.1.1'deki gibidir.



Şekil 4.1 Öklid uzayında görüş açısı

Aslında, $\angle_o APB$ görüş açısı $\angle APB$ nin P den geçen ve normali \overrightarrow{OP} olan hiperdüzleme dik izdüşümüdür, Şekil 4.1'deki $\angle A'P'B'$ açısına eşittir.

Görüş açısı tanımı yardımıyla Şekil 1.1'deki kutu ve eğik kutu resimleri incelenecektir. Dik eksenlerin görüş açıları bu konuda yardımcı olacaktır. Bunun için, P noktasında bir dik çatı seçilsin.



Şekil 4.2 $\angle_o A_0 P A_1$ görüş açısı

Şekil 4.2'de görüldüğü üzere, P- $A_0 A_1 A_2$ dik eksenlerine O görüş noktasından bakılsın. O görüş noktası orijin olacak şekilde E^3 'te O - $x_0 x_1 x_2$ dik koordinat sistemi oluşturulsun. $P = (1, 0, 0)$ olsun.

$$\overrightarrow{PA_0} = (a_{00}, a_{01}, a_{02})$$

$$\overrightarrow{PA_1} = (a_{10}, a_{11}, a_{12})$$

$$\overrightarrow{PA_2} = (a_{20}, a_{21}, a_{22}),$$

$(a_{ij}) \in SO(3)$ olacak şekilde, $\angle_o A_i P A_j$ ($i, j=0,1,2$) görüş açısı; $\vec{u}_i = (a_{i1}, a_{i2})$ ve $\vec{u}_j = (a_{j1}, a_{j2})$ vektörleri arasındaki açı olarak verilir.

Burada, $P - A_0A_1A_2$ dik eksenlerine O görüş noktasından bakıldığında, matristen de görüleceği gibi, üç görüş açısı elde edilir. $P = (1, 0, 0)$ noktası seçildiği için görüş açısı tanımından yola çıkılarak \overrightarrow{OP} doğrusunu normal kabul eden düzleme dik izdüşüm yapılacaktır. Bu düzlemin $x = 1$ düzlemi olduğu görülmektedir. $\angle_o A_0PA_1$, $\angle_o A_0PA_2$ ve $\angle_o A_1PA_2$ dik izdüşümler sonrasında elde edilen üç görüş açısı olacaktır. Şekil 4.2'de görüldüğü üzere, A_0 ve A_1 noktalarının $x = 1$ düzlemine dik izdüşümü ile A_0' ve A_1' noktaları elde edilir. $\overrightarrow{PA_0'} = (0, \vec{u}_0)$ ve $\overrightarrow{PA_1'} = (0, \vec{u}_1)$ vektörleri arasındaki açı, $\angle_o A_0PA_1$ görüş açısıdır. Tanım gereği bu görüş açısını oluşturan iki vektör matristen de görüleceği gibi $\vec{u}_0 = (a_{01}, a_{02})$ ve $\vec{u}_1 = (a_{11}, a_{12})$ vektörleridir.

Eğer P noktası $(0, 0, 1)$ seçilmiş olsaydı, $z = 1$ düzlemine izdüşüm yapılmış olacaktı. Bu durumda, $(a_{ij}) \in SO(3)$ olacak şekilde, $\angle_o A_iPA_j$ ($i, j=0,1,2$) görüş açısı, $\vec{u}_i = (a_{i0}, a_{i1})$ ve $\vec{u}_j = (a_{j0}, a_{j1})$ vektörleri arasındaki açı olarak verilir. Yani, $\angle_o A_0PA_1$ görüş açısını oluşturan iki vektör, matristen de görüleceği gibi, $\vec{u}_0 = (a_{00}, a_{01})$ ve $\vec{u}_1 = (a_{10}, a_{11})$ vektörleri olurdu. Burada $\overrightarrow{PA_0'} = (\vec{u}_0, \vec{0})$ ve $\overrightarrow{PA_1'} = (\vec{u}_1, 0)$ olur.

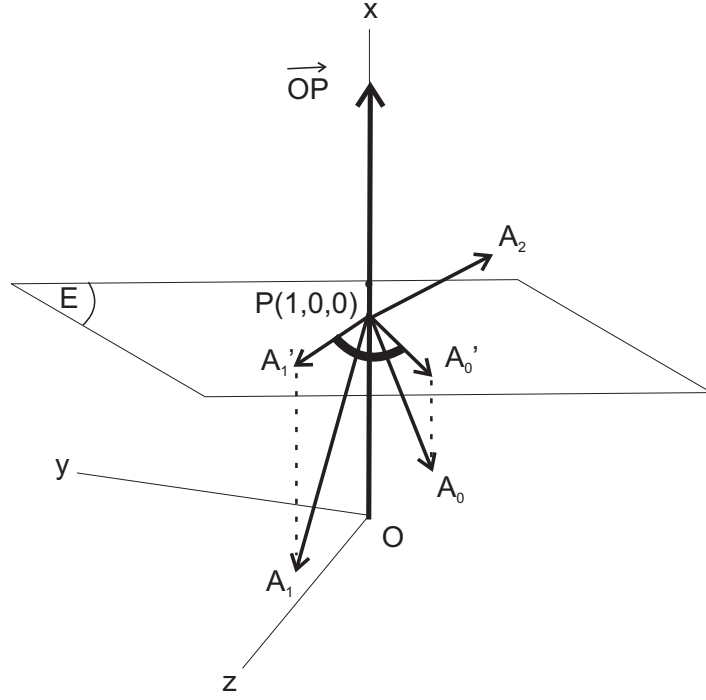
Örnek 4.1.3. $P = (1, 0, 0)$ noktası ve $A_0 = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$,

$A_1 = (1 + \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$, $A_2 = (1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ noktaları yardımıyla P noktasında bir çatı oluşturulsun.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA_0'} &= (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0) \\ \overrightarrow{PA_1'} &= (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}) \\ \overrightarrow{PA_2'} &= (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}),\end{aligned}$$

Şekil 4.3'te de görülebilen bu ortonormal çatıya O noktasından bakıldığında görülebilecek üç görüş açısı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}A_0' &= (1, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0), A_1' = (1, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}), A_2' = (1, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), \\ \vec{u}_0 &= (\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0), \vec{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}) \text{ ve } \vec{u}_2 = (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \text{ olduğundan;} \end{aligned}$$



Şekil 4.3 $P - A_0A_1A_2$ çatısı ve $\angle_o A_0PA_1$ görüş açısı

$\angle_o A_0PA_1$ görüş açısını, $\overrightarrow{PA_0} = (0, \vec{u}_0) = (0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$ ile $\overrightarrow{PA_1} = (0, \vec{u}_1) = (0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$ vektörleri oluşturmaktadır ve açının değeri $\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \theta = 116,56$ olur.

$\angle_o A_0PA_2$ görüş açısını, $\overrightarrow{PA_0} = (0, \vec{u}_0) = (0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$ ile $\overrightarrow{PA_2} = (0, \vec{u}_2) = (0, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ vektörleri oluşturmaktadır ve açının değeri $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45$ olur.

$\angle_o A_1PA_2$ görüş açısını, $\overrightarrow{PA_1} = (0, \vec{u}_1) = (0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$ ile $\overrightarrow{PA_2} = (0, \vec{u}_2) = (0, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ vektörleri oluşturmaktadır ve açının değeri $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \theta = 71,56$ olur.

İzdüşüm yapılacak olan düzlem değiştirilerek başka bir örnek verilsin.

Örnek 4.1.4. $P = (0, 2, 0)$ noktası ve $A_0 = (\frac{4}{\sqrt{66}}, 2 - \frac{1}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}})$, $A_1 = (\frac{-2}{\sqrt{6}}, 2 - \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $A_2 = (\frac{1}{\sqrt{11}}, 2 - \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}})$ noktaları yardımıyla P noktasında bir

çatı oluşturulsun.

$P = (0, 2, 0)$ noktası seçildiği için, görüş açısı tanımından yola çıkılarak \overrightarrow{OP} doğrusunu normal kabul eden düzleme dik izdüşüm yapılacaktır. Bu düzlemin $y = 2$ düzlemi olduğu görülmektedir. A_0 ve A_1 noktalarının $y = 2$ düzlemine dik izdüşümü ile A_0' ve A_1' noktaları elde edilir.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA_0} &= \left(\frac{4}{\sqrt{66}}, \frac{-1}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}}\right) \\ \overrightarrow{PA_1} &= \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ \overrightarrow{PA_2} &= \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}\right),\end{aligned}$$

Bu ortanormal çatıya O noktasından bakıldığında görülebilecek üç görüş açısı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}A'_0 &= \left(\frac{4}{\sqrt{66}}, 2, \frac{7}{\sqrt{66}}\right), A'_1 = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), A'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, 2, \frac{-1}{\sqrt{11}}\right), \\ \vec{u}_0 &= \left(\frac{4}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}}\right), \vec{u}_1 = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \text{ ve } \vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}\right) \text{ olduğundan;} \end{aligned}$$

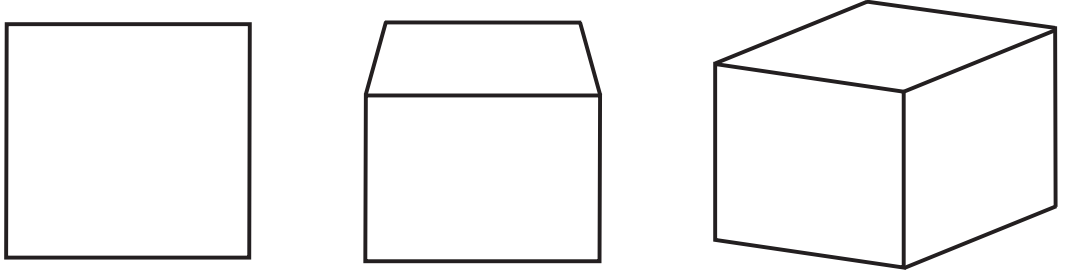
$\angle_o A_0 P A_1$ görüş açısını, $\overrightarrow{PA'_0} = \left(\frac{4}{\sqrt{66}}, 0, \frac{7}{\sqrt{66}}\right)$ ile $\overrightarrow{PA'_1} = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ vektörleri oluşturmaktadır ve açının değeri $\cos \theta = \frac{-1}{5\sqrt{13}} \Rightarrow \theta = 93, 17$ olur.

$\angle_o A_0 P A_2$ görüş açısını, $\overrightarrow{PA'_0} = \left(\frac{4}{\sqrt{66}}, 0, \frac{7}{\sqrt{66}}\right)$ ile $\overrightarrow{PA'_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{11}}\right)$ vektörleri oluşturmaktadır ve açının değeri $\cos \theta = \frac{-3}{\sqrt{130}} \Rightarrow \theta = 105, 25$ olur.

$\angle_o A_1 P A_2$ görüş açısını, $\overrightarrow{PA'_1} = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ ile $\overrightarrow{PA'_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{11}}\right)$ vektörleri oluşturmaktadır ve açının değeri $\cos \theta = \frac{-3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \theta = 161, 56$ olur.

Dolayısıyla, seçilen herhangi bir noktada kurulan bir dik çatıya başka bir noktadan bakıldığında, bu çatıya ait üç görüş açısı elde edilir. Bu durum, bir kutuya bakıldığında durumla benzerdir. Kutunun herhangi bir köşesi ve o köşeye ait üç ayrı düşünülürse, kutunun o noktasında kurulmuş bir dik çatı görülebilir. Bu düşünce ile kutuya belli bir mesafeden bakıldığında, görüş noktasına göre, o kutunun en fazla üç

yüzünün görülebildiği fark edilir. Yani, görüş noktası değiştirildikçe, kutunun şeklinin de farklı algılandığı ortaya çıkacaktır. Böylelikle, hayattaki birçok şeyin bakıldığı noktaya göre olan değişimi ve bunun geometriye bu şekilde yansıdığı hissedilebilir. Ayrıca, Şekil 4.4'ün de yardımıyla, kutunun bir yüzüne, izdüşüm yapılan düzleme paralel olarak bakıldığında yalnızca tek yüzü görülebilirken; görüş noktası değiştirilerek kutunun iki hatta üç yüzü görülebilir. Diğer taraftan bu durum, gündelik yaşamdaki algıların bu yolla değiştirilebileceğinin bir kanıtıdır.



Şekil 4.4 Dik kutulara farklı noktalardan bakıldığında görülen yüzleri

Teorem 4.1.5.

Öklid uzayında bir kutuya bakıldığında görülen üç görüş açısı da aynı anda geniş açılı yapılabilir fakat üç görüş açısı da aynı anda dar açılı yapılamaz.

İspat

$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = -a_{i0}a_{j0}$ olduğuna dikkat edilsin. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri ele alınsın. $\langle u, v \rangle = 0$ olduğundan, $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$ olur. Buradan, $u_2v_2 + u_3v_3 = -u_1v_1$ olduğu görülür.

\vec{PA}_i vektörünün gerektiğinde zıt vektörü alınarak, a_{i0} ın tüm değerlerini $a_{i0} \geq 0$ yapabilmek mümkündür. Dolayısıyla, $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j \leq 0$ olduğu aşikardır. Diğer taraftan, \vec{PA}_i vektörünün gerektiğinde zıt vektörü alınarak $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$ çarpımının tüm değerlerinin $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j > 0$ yapabileceğimizi varsayalım. O halde, $a_{00}a_{10}$, $a_{10}a_{20}$ ve $a_{20}a_{00}$ değerleri negatiftir. Bu bir çelişkidir çünkü bu üç çarpımın sonucu aynı anda negatif olamaz.

Bu teorem aşağıdaki şekilde de ispatlanabilir. Kabul edilsin ki;

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vektörleri için, $\langle u, v \rangle > 0$, $\langle v, w \rangle > 0$ ve $\langle u, w \rangle > 0$ olsun. Yani üç açđ da dar açđ olsun.

$$\langle u, v \rangle > 0 \Rightarrow u_2v_2 + u_3v_3 = -u_1v_1 > 0 \Rightarrow u_1v_1 < 0,$$

$$\langle v, w \rangle > 0 \Rightarrow v_2w_2 + v_3w_3 = -v_1w_1 > 0 \Rightarrow v_1w_1 < 0,$$

$$\langle u, w \rangle > 0 \Rightarrow u_2w_2 + u_3w_3 = -u_1w_1 > 0 \Rightarrow u_1w_1 < 0 \text{ olmalıdır.}$$

Halbuki, $u_1 > 0, v_1 < 0, v_1 < 0, w_1 > 0 \Rightarrow u_1w_1 > 0$ ya da $u_1 < 0, v_1 > 0, v_1 > 0, w_1 < 0 \Rightarrow u_1w_1 > 0$ olur. Yani, $u_1v_1 < 0$ ve $v_1w_1 < 0$ iken, $u_1w_1 > 0$ olmaktadır. Diğer bir ifadeyle, üç görüş açđsđ da dar açđlı olamaz.

Bir örnek yardđmıyla Teorem 4.1.5'in ispatđ gözden geçirilecektir.

Örnek 4.1.6. Örnek4.1.3te kurulan çatđ tekrar ele alınarak

$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = -a_{i0}a_{j0}$ olduğuna dikkat edilsin.

$$\vec{PA}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\vec{PA}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\vec{PA}_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\vec{u}_0 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\vec{u}_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ olacaktır.}$$

Görüş açđlarını oluşturan üç vektörün iç çarpım sonuçlarının aynı anda pozitif olabileceği yani üç görüş açđsđnın da aynı anda dar açđlı yapılabileceği kabul edilsin.

$\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_1 = \frac{-1}{\sqrt{12}} = -a_{00}a_{10}$. Fakat $\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_1$ çarpımının sonucu negatif olduğundan, pozitif bir sonuç elde edilmesi için \vec{PA}_0 vektörünün zıt vektörü olan $-\vec{PA}_0 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ vektörü işleme alınarak devam edilir. $-\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_1 = \frac{+1}{\sqrt{12}} = -a_{00}a_{10}$. Buradan $a_{00}a_{10} < 0$ olur.

$$-\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_2 = \frac{-1}{\sqrt{6}} = -a_{00}a_{20}$$

Bir önceki işlemde bulunan sonucun pozitif yapabilmesi için $\overrightarrow{PA_0}$ vektörünün zıt vektörü alınmıştır. Dolayısıyla buradaki iç çarpım sonucu negatif olmak zorunda oldu. $a_{10}a_{20} > 0$ oldu. $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} = -a_{10}a_{20}$ olarak elde edilir. Buradan $a_{20}a_{00} < 0$ olur.

Teorem 4.1.5'te görüldüğü gibi a_{00}, a_{10}, a_{20} sayıları aynı anda negatif yapılamaz. Dolayısıyla, görüş açılarını oluşturan vektörlerin iç çarpım sonuçları aynı anda pozitif olamaz, üç görüş açısının da aynı anda dar açılı yapılamayacağı anlamına gelir.

Örnek 4.1.7. Örnek 4.1.4'de kurulan çatı tekrar ele alınarak, $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = -a_{i0}a_{j0}$ olduğuna dikkat edilsin.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA_0} &= \left(\frac{4}{\sqrt{66}}, \frac{-1}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}}\right) \\ \overrightarrow{PA_1} &= \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ \overrightarrow{PA_2} &= \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_0 &= \left(\frac{4}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}}\right), \\ \vec{u}_1 &= \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \text{ ve} \\ \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}\right) \text{ olacaktır.}\end{aligned}$$

Örnek 4.1.6'da olduğu gibi, görüş açılarını oluşturan üç vektörün iç çarpım sonuçlarının aynı anda pozitif olabileceği yani üç görüş açısının da aynı anda dar açılı yapılabileceği kabul edilsin. $\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_1 = \frac{-1}{6\sqrt{11}} = -a_{00}a_{10}$. Buradan $a_{00}a_{10} > 0$ olur. Fakat $\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_1$ çarpımının sonucu negatif olduğundan, pozitif bir sonuç elde edilebilmesi için $\overrightarrow{PA_0}$ vektörünün zıt vektörü olan $-\overrightarrow{PA_0} = \left(\frac{-4}{\sqrt{66}}, \frac{1}{\sqrt{66}}, \frac{-7}{\sqrt{66}}\right)$ vektörü işleme alınarak devam edilsin. $-\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_1 = \frac{+1}{6\sqrt{11}} = -a_{00}a_{10}$. Buradan $a_{00}a_{10} < 0$ olur. $\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_2 = \frac{11}{11\sqrt{6}} = -a_{00}a_{20}$. $a_{00}a_{20} < 0$ olur. $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \frac{-3}{\sqrt{66}} = -a_{10}a_{20}$ olarak elde edilir. Buradan $a_{10}a_{20} > 0$ olur.

Teorem 4.1.5'te görüldüğü gibi a_{00}, a_{10}, a_{20} sayıları aynı anda negatif yapılamaz. Dolayısıyla, görüş açılarını oluşturan vektörlerin iç çarpım sonuçları aynı anda pozitif olamaz,

üç görüş açısının aynı anda dar açılı yapılamayacağı anlamına gelir.

Şu şekilde ifade edilecek olursa, \mathbb{E}^3 teki dik eksenlerin yönleri gerektiğinde zıt alınarak üç görüş açısı da geniş açılı yapılabilir, fakat üç görüş açısını da dar açılı yapılamaz. Şekil 1 de, sağdaki kutunun Öklid uzayında kutu gibi görünmemesinin nedeni budur. Bu yolla, \mathbb{E}^3 Öklid uzayındaki dik eksenlerin görüş açılarının önemli özellikleri ortaya çıkarılmış oldu.

Bu durum benzer ifadelerle Minkowski uzayında ele alındığında, Teorem 4.1.5'teki sonucun tersine götürdüğü görülür. $ds^2 = dy_0^2 + dy_1^2 - dy_2^2$ metriklili \mathbb{E}_1^3 uzayındaki görüş açısı tanımı da \mathbb{E}^3 uzayındaki görüş açısı tanımı ile neredeyse aynıdır. Fakat Minkowski uzayında çalışılırken bazı kısıtlamalara gidilecektir.

4.2 \mathbb{E}_1^3 Minkowski Uzayında Görüş Açısı

Tanım 4.2.1. $\angle AQB$ açısı, \mathbb{E}_1^3 te bir sabit açı olsun. Görüş noktası O ve \overrightarrow{OQ} timelike vektör olmak üzere, $\angle_o AQB$ açısı, $OQAB$ bozulmuş dört yüzlüsünün OQA ve OQB yüzleri arasında kalan iki düzlemli açı olarak ifade edilsin. $\angle_o AQB$ açısına, O görüş noktasından $\angle AQB$ açısının görüş açısı denir.

Uyarı 4.2.2. \mathbb{E}_1^n de ($n \geq 4$) görüş açısı tanımı, Tanım 4.2.1'deki gibidir.

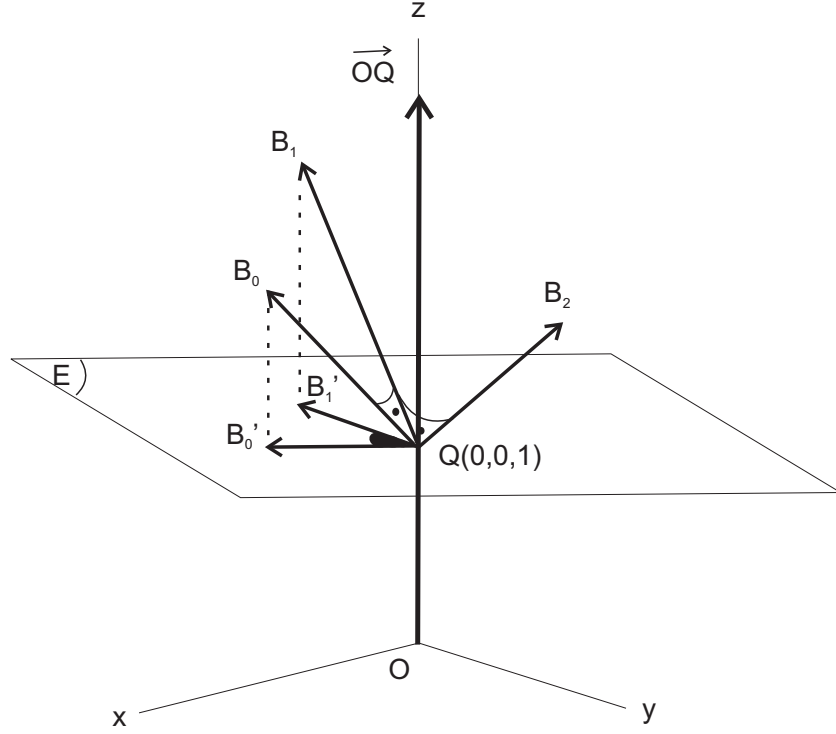
\overrightarrow{OQ} için yapılan kısıtlama, her görüş açısını iki boyutlu Öklid düzleminde olduğu gibi reel değerli yapmak içindir.

$Q - B_0B_1B_2$ dik eksenlerine O görüş noktasından bakılsın. O görüş noktası orijin olacak şekilde \mathbb{E}_1^3 te $O - y_0y_1y_2$ dik koordinat sistemi oluşturulsun. $Q = (0, 0, 1)$ olsun.

$$\overrightarrow{QB_0} = (b_{00}, b_{01}, b_{02})$$

$$\overrightarrow{QB_1} = (b_{10}, b_{11}, b_{12})$$

$$\overrightarrow{QB_2} = (b_{20}, b_{21}, b_{22}),$$



Şekil 4.5 $\angle_o B_0 Q B_1$ görüş açısı

$(b_{ij}) \in SO(2, 1)$ olacak şekilde, $\angle_o B_i Q B_j (i, j=0, 1, 2)$ görüş açısı; $\vec{v}_i = (b_{i0}, b_{i1})$ ve $\vec{v}_j = (b_{j0}, b_{j1})$ vektörleri arasındaki açı olarak verilir.

Burada, $Q - B_0 B_1 B_2$ dik eksenlerine O görüş noktasından bakıldığında, matristen de görülebileceği üzere, üç görüş açısı elde edilir. $Q = (0, 0, 1)$ noktası seçildiği için, görüş açısı tanımından yola çıkılarak \vec{OQ} timelike vektörünü normal kabul eden düzleme dik izdüşüm yapılacaktır. Bu düzlemin $z = 1$ düzlemi olduğu görülmektedir. $\angle_o B_0 Q B_1$, $\angle_o B_0 Q B_2$ ve $\angle_o B_1 Q B_2$ dik izdüşümler sonrasında elde edilecek üç görüş açısı olacaktır. B_0 ve B_1 noktalarının $z = 1$ düzlemine dik izdüşümü ile B_0' ve B_1' noktaları elde edilir. $\vec{QB_0'} = (\vec{v}_0, 0)$ ve $\vec{QB_1'} = (\vec{v}_1, 0)$ vektörleri arasındaki açı, $\angle_o B_0 Q B_1$ görüş açısıdır. Tanım gereği, bu görüş açısını oluşturan iki vektör, matristen de görüleceği gibi, $\vec{v}_0 = (b_{00}, b_{01})$ ve $\vec{v}_1 = (b_{10}, b_{11})$ vektörleridir.

Bu görüş açıları hesaplanmadan önce Tanım 2.2.9 hatırlanırsa: Buradaki görüş açı- larını oluşturan vektörler lineer bağımsız spacelike vektörler olduklarından, spacelike

bir düzlemi gererler. İndirgenmiş metrik ile verilen bu düzlem pozitif tanımlı metrik ile verilen vektör uzayıdır ve bu da Öklid uzayındaki açının tanımı olarak bilinir.

Örnek 4.2.3. $Q = (0, 0, 1)$ noktasını ve $B_0 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 1)$, $B_1 = (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{2}})$, $B_2 = (1, 1, 1 + \sqrt{3})$ noktaları yardımıyla Q noktasında bir çatı oluşturulsun.

$Q = (0, 0, 1)$ noktası seçildiği için, görüş açısı tanımından yola çıkılarak \overrightarrow{OQ} doğrusunu normal kabul eden düzleme dik izdüşüm yapılacaktır. Bu düzlemin $z = 1$ düzlemi olduğu görülmektedir. B_0 ve B_1 noktalarının $z = 1$ düzlemine dik izdüşümü ile B_0' ve B_1' noktaları elde edilir.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QB_0} &= (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0) \\ \overrightarrow{QB_1} &= (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}) \\ \overrightarrow{QB_2} &= (1, 1, \sqrt{3})\end{aligned}$$

Bu ortanormal çatıya O noktasından bakıldığında görülebilecek üç görüş açısı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}B'_0 &= (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 1), B'_1 = (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 1), B'_2 = (1, 1, 1), \\ \vec{v}_0 &= (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}), \vec{v}_1 = (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}) \text{ ve } \vec{v}_2 = (1, 1) \text{ olduğundan;}\end{aligned}$$

$\angle_o B_0 Q B_1$ görüş açısını, $\overrightarrow{QB'_0} = (\vec{v}_0, 0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$ ile $\overrightarrow{QB'_1} = (\vec{v}_1, 0) = (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0)$ vektörleri oluşturmaktadır ve açının değeri $\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 90$ olur.

$\angle_o B_0 Q B_2$ görüş açısını, $\overrightarrow{QB'_0} = (\vec{v}_0, 0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$ ile $\overrightarrow{QB'_2} = (\vec{v}_2, 0) = (1, 1, 0)$ vektörleri oluşturmaktadır ve açının değeri $\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 90$ olur.

$\angle_o B_1 Q B_2$ görüş açısını, $\overrightarrow{QB'_1} = (\vec{v}_1, 0) = (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0)$ ile $\overrightarrow{QB'_2} = (\vec{v}_2, 0) = (1, 1, 0)$ vektörleri oluşturmaktadır ve açının değeri $\cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$ olur.

Başka bir örnek ile devam edilecektir.

Örnek 4.2.4. $Q = (0, 0, -2)$ noktası ve $B_0 = (\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}, \frac{-2\sqrt{11}}{\sqrt{6}}, -2 - \frac{7}{\sqrt{6}})$,
 $B_1 = (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-4}{\sqrt{6}}, -2 - \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}})$, $B_2 = (1, -3, -2 - \sqrt{11})$ noktaları yardımıyla Q noktasında
bir çatı oluşturulsun.

$Q = (0, 0, -2)$ noktası seçildiği için, görüş açısı tanımından yola çıkılarak \overrightarrow{OQ} doğrusunu normal kabul eden düzleme dik izdüşüm yapılacaktır. Bu düzlemin $z = -2$ düzlemi olduğu görülmektedir. B_0 ve B_1 noktalarının $z = -2$ düzlemine dik izdüşümü ile B_0' ve B_1' noktaları elde edilir.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QB_0} &= (\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}, \frac{-2\sqrt{11}}{\sqrt{6}}, \frac{-7}{\sqrt{6}}) \\ \overrightarrow{QB_1} &= (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-4}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{-11}}{\sqrt{6}}) \\ \overrightarrow{QB_2} &= (1, -3, -\sqrt{11})\end{aligned}$$

Bu ortanormal çatıya O noktasından bakıldığında görülebilecek üç görüş açısı aşağıdaki gibidir.

$$B'_0 = (\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}, \frac{-2\sqrt{11}}{\sqrt{6}}, -2), B'_1 = (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-4}{\sqrt{6}}, -2), B'_2 = (1, -3, -2), \vec{v}_0 = (\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}, \frac{-2\sqrt{11}}{\sqrt{6}}), \\ \vec{v}_1 = (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-4}{\sqrt{6}}) \text{ ve } \vec{v}_2 = (1, -3) \text{ olduğundan;}$$

$\angle_o B_0 Q B_1$ görüş açısını, $\overrightarrow{QB'_0} = (\vec{v}_0, 0) = (\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}, \frac{-2\sqrt{11}}{\sqrt{6}}, 0)$ ile $\overrightarrow{QB'_1} = (\vec{v}_1, 0) = (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-4}{\sqrt{6}}, 0)$ vektörleri oluşturmaktadır ve açının değeri $\cos \theta = \frac{7}{\sqrt{85}} \Rightarrow \theta = 40, 60$ olur.

$\angle_o B_0 Q B_2$ görüş açısını, $\overrightarrow{QB'_0} = (\vec{v}_0, 0) = (\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}, \frac{-2\sqrt{11}}{\sqrt{6}}, 0)$ ile $\overrightarrow{QB'_2} = (\vec{v}_2, 0) = (1, -3, 0)$ vektörleri oluşturmaktadır ve açının değeri $\cos \theta = \frac{7}{\sqrt{50}} \Rightarrow \theta = 8, 13$ olur.

$\angle_o B_1 Q B_2$ görüş açısını, $\overrightarrow{QB'_1} = (\vec{v}_1, 0) = (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-4}{\sqrt{6}}, 0)$ ile $\overrightarrow{QB'_2} = (\vec{v}_2, 0) = (1, -3, 0)$ vektörleri oluşturmaktadır ve açının değeri $\cos \theta = \frac{11}{\sqrt{170}} \Rightarrow \theta = 32, 47$ olur.

Dolayısıyla, seçilen herhangi bir noktada kurulan bir dik çatıya, başka bir noktadan bakıldığında, bu çatıya ait üç görüş açısı elde edilir. Bu durumun, bir kutuya bakıldığında durumla benzer olduğu daha önce belirtilmişti.

Teorem 4.2.5. Minkowski uzayında bir kutuya bakıldığında görülen üç görüş açısı da aynı anda dar açılı yapılabilir, fakat üç görüş açısı da aynı anda geniş açılı yapılamaz.

İspat

$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = +b_{i2}b_{j2}$ olduğuna dikkat edilsin. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörlerini ele alınsın. $\langle u, v \rangle = 0$ olduğundan, $u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3 = 0$ olur. Buradan, $u_1v_1 + u_2v_2 = u_3v_3$ olduğu görülür. $\overrightarrow{QB_i}$ vektörünün gerektiğinde zıt vektörü alınarak, b_{i2} nin tüm değerlerini $b_{i2} \geq 0$ yapabilmek mümkündür. Dolayısıyla, $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j \geq 0$ olduğu aşıkardır. Diğer taraftan, $\overrightarrow{QB_i}$ vektörünün gerektiğinde zıt vektörü alınarak $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$ çarpımının tüm değerlerinin $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j < 0$ yapılabileceği varsayılınsın. O halde, $b_{02}b_{12}$, $b_{12}b_{22}$ ve $b_{22}a_{02}$ değerleri negatiftir. Bu bir çelişkidir çünkü bu iç çarpım sonuçları aynı anda negatif olamaz.

Başka bir şekilde ifade edilsin. Kabul edilsin ki;

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vektörleri için, $\langle u, v \rangle < 0$, $\langle v, w \rangle < 0$ ve $\langle u, w \rangle < 0$ olsun. Yani üç açı da geniş açı olsun.

$$\langle u, v \rangle < 0 \Rightarrow u_1v_1 + u_2v_2 = u_3v_3 < 0,$$

$$\langle v, w \rangle < 0 \Rightarrow v_1w_1 + v_2w_2 = v_3w_3 < 0,$$

$$\langle u, w \rangle < 0 \Rightarrow u_1w_1 + u_2w_2 = u_3w_3 < 0 \text{ olmalıdır.}$$

Halbuki, $u_3 > 0$, $v_3 < 0$, $v_3 < 0$, $w_3 > 0 \Rightarrow u_3w_3 > 0$ ya da $u_3 < 0$, $v_3 > 0$, $v_3 > 0$, $w_3 < 0 \Rightarrow u_3w_3 > 0$ olur. Yani, $u_3v_3 < 0$ ve $v_3w_3 < 0$ iken, $u_3w_3 > 0$ olmaktadır. Diğer bir ifadeyle, üç açı da geniş açı olamaz.

Bir örnek yardımıyla Teorem 4.2.5'in ispatı gözden geçirilecektir.

Örnek 4.2.6. Örnek 4.2.3'te kurulan çatı tekrar ele alınarak, $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = +b_{i2}b_{j2}$ olduğuna dikkat edilsin.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QB_0} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ \overrightarrow{QB_1} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \\ \overrightarrow{QB_2} &= (1, 1, \sqrt{3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \\ \vec{v}_1 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \\ \vec{v}_2 &= (1, 1) \text{ olur.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1 &= 0 = +b_{02}b_{12} \\ \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_2 &= 0 = +b_{02}b_{22} \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = +b_{12}b_{22} \text{ olarak elde edilir.}\end{aligned}$$

Yukarıda görüldüğü üzere, gerektiğinde \vec{v}_i ve \vec{v}_j vektörlerinin zıt vektörleri alındığında dahi $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$ çarpımının tüm değerleri negatif yapılamaz, yani üç görüs açısı da geniş açılı olamaz.

Diğer bir örnek ile devam edilsin.

Örnek 4.2.7. Örnek 4.2.4'te kurulan çatı tekrar ele alınarak, $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = +b_{i2}b_{j2}$ olduğuna dikkat edilsin.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QB_0} &= \left(\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}, \frac{-2\sqrt{11}}{\sqrt{6}}, \frac{-7}{\sqrt{6}}\right) \\ \overrightarrow{QB_1} &= \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-4}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{-11}}{\sqrt{6}}\right) \\ \overrightarrow{QB_2} &= (1, -3, -\sqrt{11})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 &= \left(\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}, \frac{-2\sqrt{11}}{\sqrt{6}}\right) \\ \vec{v}_1 &= \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-4}{\sqrt{6}}\right) \\ \vec{v}_2 &= (1, -3) \text{ olur.}\end{aligned}$$

Örnek 4.2.6'da olduğu gibi, görüş açılarını oluşturan üç vektörün iç çarpım sonuçlarının aynı anda negatif olabileceği yani üç görüş açısının da geniş açılı yapılabileceği kabul edilsin. $\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1 = \frac{7\sqrt{11}}{6} = +b_{02}b_{12}$. Fakat $\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1$ çarpımının sonucu pozitif olduğundan, negatif bir sonuç elde edebilmesi için $\overrightarrow{QB_0}$ vektörünün zıt vektörü olan $-\overrightarrow{QB_0} = (\frac{\sqrt{-11}}{\sqrt{6}}, \frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{6}}, \frac{7}{\sqrt{6}})$ vektörü işleme alınarak devam edilsin. $\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1 = \frac{-7\sqrt{11}}{6} = +b_{02}b_{12}$ $b_{02}b_{12} < 0$ olur. Yine $\overrightarrow{QB_0}$ vektörünün zıt vektörü işleme alınarak $\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_2 = \frac{-7\sqrt{11}}{\sqrt{6}} = +b_{02}b_{22}$ elde edilir. $b_{02}b_{22} < 0$ olur. $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \frac{11}{\sqrt{6}} = +b_{12}b_{22}$

İlk iki iç çarpım sonucu negatif elde edildiği için ve b_{02}, b_{12}, b_{22} sayılarının aynı anda negatif olması imkansız olduğundan $b_{12}b_{22} > 0$ olarak elde edilir ve bu çarpımın negatif olmasına imkan yoktur.

Yukarıda görüldüğü üzere, gerektiğinde \vec{v}_i ve \vec{v}_j vektörlerinin zıt vektörleri alındığında dahi $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$ çarpımının tüm değerleri negatif yapılamaz, yani üç görüş açısı da geniş açılı olamaz.

Şu şekilde ifade edilecek olursa, \mathbb{E}_1^3 deki dik eksenlerin yönleri gerektiğinde zıt alınarak üç görüş açısı aynı anda dar açılı yapılabilir, fakat üç görüş açısı da geniş açılı yapılamaz. Şekil 1.1'de, soldaki kutunun Minkowski uzayında kutu gibi görünmemesinin nedeni budur. Bu yolla, \mathbb{E}_1^3 Minkowski uzayındaki dik eksenlerin görüş açılarının önemli özellikleri ortaya çıkarılmış oldu.

Teorem 4.2.8. \mathbb{E}^3 ve \mathbb{E}_1^3 uzaylarındaki dik eksenlerin görüş açıları arasında bir dualite vardır.

İspat İkinci bölümde verilen dual dönüşüm hatırlanırsa: $SO(3) \setminus \{a_{nn} = 0\}$ ve $SO(2, 1)$ arasında 1-1 karşılık vardır.

Öncelikle f dual dönüşümü hatırlanacak olursa,

$$f : A \rightarrow f(A)$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & a_{nn} \end{array} \right) \mapsto f(A) = \frac{1}{a_{nn}} \left(\begin{array}{c|c} a_{nn}(B^{-1})^t & C \\ \hline -D & 1 \end{array} \right).$$

$\forall A = (a_{ij}) \in SO(3) \setminus \{a_{nn} = 0\}$ matrisi için,

$$\overrightarrow{PA_0} = (a_{00}, a_{01}, a_{02})$$

$$\overrightarrow{PA_1} = (a_{10}, a_{11}, a_{12})$$

$$\overrightarrow{PA_2} = (a_{20}, a_{21}, a_{22}),$$

olduğu hatırlanırsa, görüş açıları arasındaki dual dönüşümü ifade eden bu matris:

$$f(A) = \frac{1}{a_{22}} \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & -a_{10} & a_{02} \\ -a_{01} & a_{00} & a_{12} \\ \hline -a_{20} & -a_{21} & 1 \end{array} \right),$$

olur.

Bu matriste, $\vec{u}_1 = (a_{00}, a_{01})$ vektörü $-\pi/2$ kadar döndürülerek $\vec{v}_2 = (-a_{01}, a_{00})$ vektörü, $\vec{u}_2 = (a_{10}, a_{11})$ vektörü $\pi/2$ kadar döndürülerek $\vec{v}_1 = (a_{11}, -a_{10})$ vektörünün elde edildiği görülür.

Bu teorem daha önce verilen örnekler yardımıyla incelenebilir. Görüş açıları arasındaki dualite, örneklerde kurulan çatıyı oluşturan matrisler yardımıyla gözlemlenebilir. Ayrıca daha önce tanımlanan f dual dönüşümü sayesinde, Öklid uzayında verilen örnekte kurulan bir çatı ile Minkowski uzayında verilen örnekteki çatı arasında bir geçiş söz konusu olduğuna dikkat edilsin.

$$\overrightarrow{PA_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\overrightarrow{PA_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\overrightarrow{PA_2} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \text{ olmak üzere,}$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right) \Leftrightarrow f(A) = \sqrt{3} \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{array} \right)$$

elde edilir.

Görüldüğü gibi, Minkowski uzayında kurulan ilk çatı elde edilmiş oldu.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QB_0} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ \overrightarrow{QB_1} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}} \right) \\ \overrightarrow{QB_2} &= (1, 1, \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Diğer örnek ile aşağıdaki şekilde devam edilsin.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA_0} &= \left(\frac{4}{\sqrt{66}}, \frac{-1}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}} \right) \\ \overrightarrow{PA_1} &= \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \\ \overrightarrow{PA_2} &= \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}} \right), \end{aligned}$$

Öklid uzayında kurulan bu çatı işleme alınsın.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{4}{\sqrt{66}} & \frac{-1}{\sqrt{66}} & \frac{7}{\sqrt{66}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{-3}{\sqrt{11}} & \frac{-1}{\sqrt{11}} \end{array} \right) \Leftrightarrow f(A) = -\sqrt{11} \left(\begin{array}{cc|c} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{7}{\sqrt{66}} \\ \frac{1}{\sqrt{66}} & \frac{4}{\sqrt{66}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}} & 1 \end{array} \right)$$

Görüldüğü üzere, Minkowski uzayında kurulan ikinci çatı f dual dönüşümü sayesinde elde edilmiş oldu.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QB_0} &= \left(\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}, \frac{-2\sqrt{11}}{\sqrt{6}}, \frac{-7}{\sqrt{6}} \right) \\ \overrightarrow{QB_1} &= \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-4}{\sqrt{6}}, \frac{-\sqrt{11}}{\sqrt{6}} \right) \\ \overrightarrow{QB_2} &= (1, -3, -\sqrt{11}) \end{aligned}$$

Böylelikle görüş açısı kavramı ve her iki uzaydaki ortogonal eksenler üzerinde çalışılarak, bu tez çalışmasının başlangıç noktasını oluşturan kutu ve eğik kutu resimleri incelenmiş oldu. Aynı zamanda, verilen dual dönüşüm vasıtasıyla iki uzay arasında bir geçiş sağlanmış oldu.

KAYNAKLAR

Dohi, R., Maeda, Y., Mori, M., Yoshida, H. 2010. "A dual transformation between $\mathbf{SO}(n + 1)$ and $\mathbf{SO}(n, 1)$ and its geometric applications". Linear Algebra Appl., vol. 432; pp. 770-776.

Greub, W.H. 1967. "Linear Algebra". Springer-Verlag, 451, New York.

Jennings, G. 1994. "Modern Geometry with Applications". Springer-Verlag, 187, New York.

Maeda, Y., Maehara, H. 2003. "Observing an angle from various viewpoints". JCDCG 2002, LNCS 2866; pp. 200-203 Springer-Verlag, Berlin.

Maeda, Y., Mori, M. 2005. "Three visual angles of three dimensional orthogonal axes and their visualization, Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics". ATCM, LNC; pp. 315-321.

Maeda, Y., Yoshida, H. 2008. "Hyperbolic geometry as a view screen in Minkowski space". Proceedings of the 13th Asian Technology Conference in Mathematics, Mathematics and Technology, LLC; pp. 143-152.

O'Neill, B. 1983. "Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity". Academic Press, 468, London.

Ratcliffe, J.G. 2006. "Foundations of hyperbolic manifolds. Graduate Texts in Mathematics, Second edition". Springer, 149, New York.

Ryan, P.J. 1986. "Euclidean and non-Euclidean Geometry". Cambridge University Press, 232, Cambridge.

Weinstein, T. 1996. "An Introduction to Lorentz surfaces". de Gruyter, 213, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Gülsüm Biçer

Doğum Yeri: Balıkesir

Doğum Tarihi: 26.06.1985

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dil: İngilizce, Almanca, İspanyolca

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise: Giresun Hamdi Bozbağ Anadolu Lisesi-2001

Erzurum Anadolu Lisesi-2003

Lisans: Başkent Üniversitesi Eğitim Fak. İlk. Matematik Öğretmenliği(Burslu)-2008
Başkent Üniversitesi Eğitim Fak. Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Öğretmenliği Çift
Anadal Programı-2009

Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim
Dalı (2009-2011)